INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · K. MAGNUS · E. METTLER
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXIX. BAND ZWEITES HEFT 1960

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Abgeschlossen am 29. April 1960

Postverlagsort Berlin

Preis DM 13,20

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. R. Grammel, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. A. Betz, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Professor Dr.-Ing. K. Klotter, Darmstadt, Technische Hochschule, Institut für angewandte Mechanik
Professor Dr. K. Magnus, Stuttgart O, Hackländerstraße 33
Professor Dr. E. Mettler, Karlsruhe-Durlach, Geigersberger Str. 12
Professor Dr.-Ing. K. v. Sanden, Karlsruhe-West, Hertzstr. 16, (T. H. West)
Professor Dr.-Ing. E. Schmidt, Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21
Professor Dr.-Ing. E. Sörensen, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Nachdruck: Mit der Annahme des Manuskripts eines Beitrages für das „Ingenieur-Archiv" erwirbt der Springer-Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder, einschließlich des Rechts der photomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung. — Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen nicht vorher an anderer Stelle veröffentlicht worden sein und auch später nicht anderweitig, weder im Inland noch im Ausland, veröffentlicht werden. Ausnahmen von dieser Regel bedürfen einer entsprechenden Vereinbarung zwischen Autor, Herausgeber und Verlag.

Photokopien: Auf Grund des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens ist jedoch die Anfertigung photomechanischer Kopien eines Beitrages gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch gestattet, sofern der Hersteller oder Benutzer jede Seite dieser Kopie mit einer Gebühren-Wertmarke im Betrag von DM 0,30 kenntlich macht. Diese Marken sind zu beziehen vom Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. (Inkasso-Stelle) Frankfurt/M., Großer Hirschgraben 17/19. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.* Die Verpflichtung zur Verwendung von Gebühren-Wertmarken entfällt, falls der Hersteller von Kopien mit dem Springer-Verlag ein Pauschalabkommen über die Kopie-Gebühren-Entrichtung vereinbart hat.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 28—30 / Fernsprecher 2 79 01

Berlin-Wilmersdorf
Heidelberger Platz 3 / Fernsprecher Sammel-Nr. 83 03 01

Inhalt:

Seite

Krause, F., Druckentnahme durch Längsschlitze 73

Scholz, N., Ergänzungen zum Grenzschichtquadratverfahren von E. Truckenbrodt 82

Shioya, S., On the Transverse Flexure of a Semi-Infinite Plate with an Elliptic Notch 93

Mitterlehner, G., Der Einfluß der Kraftwagenfederung auf die Lenkstabilität..... 100

Rüdiger, D., Eine Verallgemeinerung des Prinzips vom Minimum der potentiellen Energie zweidimensionaler elastischer Kontinua..... 115

Schaefer, H., Die Analogie zwischen den Verschiebungen und den Spannungsfunktionen in der Biegetheorie der Kreiszylinderschale 125

Hübner, E., Eigenschwingungszahlen zusammengesetzter Schwingungs-Systeme.. 134

Bufler, H., Bemerkung zur vollständigen Auswertung des Spannungszustandes in Platten mit Hilfe der Spannungsoptik..... 150

INGENIEUR-ARCHIV

XXIX. BAND ZWEITES HEFT 1960

Druckentnahme durch Längsschlitze

Von F. Krause

1. Einleitung.[1] Die vorliegende Arbeit behandelt die Messung des statischen Druckes in einer strömenden Flüssigkeit. Seit den grundlegenden Untersuchungen von *Prandtl* und seinen Mitarbeitern[2] benutzt man zur Druckentnahme schlanke Stromlinienkörper, deren Oberfläche eine oder mehrere Druckentnahme-Öffnungen besitzt.

Zwischen dem so gemessenen Druck und dem Druck, der am Ort der Wandöffnung vorhanden war, bevor der Stromlinienkörper eingeführt wurde, bestehen nun verschiedene Abweichungen, die sich auf drei Ursachen zurückführen lassen.

Die erste besteht in der Verdrängung der Strömung durch den eingebrachten Rotationskörper. Sie kann mit Hilfe der Singularitätenmethode berechnet und durch geeignete Formgebung weitgehend vermieden werden[3, 4].

Die zweite besteht in der Rauhigkeit des Bohrlochrandes[5] und Welligkeit[6] der festen Wand in der Umgebung der Druckentnahmeöffnung und läßt sich durch sorgfältige Herstellung weitgehend vermeiden.

Die dritte Ursache schließlich besteht in der Sekundärströmung, die sich über und in der Wandöffnung ausbildet. Für runde Bohrungen hat man den Einfluß untersucht, den der Durchmesser der Bohrung[7, 8, 9], die Tiefe der Bohrung[9], die Neigung der Bohrlochachse[9], Abrundung des Bohrlochrandes[10], die Parameter der äußeren Strömung in unmittelbarer Umgebung des Bohrloches[11] und ein Druckgradient der Außenströmung[12] auf die Druckentnahme ausüben. Die beobachteten Abweichungen betragen größenordnungsmäßig 1% des Staudrucks.

Die vorliegende Arbeit behandelt ebenfalls den Einfluß der Sekundärströmung auf die Druckentnahme und ist aus einer Fortführung der Arbeit von *A. K. Ray*[11] entstanden. Im Gegensatz zu den bisherigen Untersuchungen wurde die Wandöffnung nicht als Bohrung, sondern als langer Schlitz ausgebildet.

Theoretische Überlegungen lassen vermuten, daß ein langer Schlitz die Druckverteilung, die sich über ihm einstellt, mittelt. Ist der Druck der ursprünglichen Strömung in Strömungsrichtung konstant, so wird der Druck im mittleren Teil des Schlitzes voraussichtlich ziemlich störungsfrei übertragen. Die Sekundärströmung in der Schlitzöffnung erzeugt nur an der Vorder- und Hinterkante Störungen der ursprünglichen Druckverteilung. Es ist daher zu erwarten, daß der Druckentnahmefehler um so kleiner wird, je länger der Schlitz ist.

Andererseits tritt bei einem langen Schlitz der Einfluß eines Druckgradienten in Strömungsrichtung stärker hervor. Zwischen den beiden Schlitzenden besteht dann ein Druckunterschied, der bei gegebenen Druckgradienten um so größer ist, je länger der Schlitz ist. Es fragt sich nun, an welcher Stelle der Schlitzlänge der veränderliche Außendruck mit dem Druck im Schlitz übereinstimmt. Da diese

---

[1] Gekürzte Fassung der gleichlautenden Diplomarbeit der Math.-nat. Fakultät der Universität Göttingen vom Dezember 1956.

[2] *H. Kumbruch*, Messung strömender Luft mittels Staugeräten, VDI-Forschungsheft 240 (1921).

[3] *E. Owen* u. *F. C. Johansen*, The design of pitot-static-tubes, ARC, R. u. M. 891 (1925).

[4] *W. M. Schulze, G. C. Ashley, jr.* u. *J. R. Erwin*. Several combination probes for surveying static and total pressure and flow direction, NACA TN 2830.

[5] *J. Polzin*, Ing.-Arch. 10 (1939), S. 326.

[6] *H. Peters*, Druckmessung. Handbuch der experimentellen Physik, Bd. 4, Teil 1, Leipzig 1931.

[7] *G. Fuhrmann*, Theoretische und experimentelle Untersuchungen an Ballonmodellen, Dissertation, Göttingen 1912, S. 46.

[8] *A. Fage*, Proc. Rey. Soc. London 155, (1936), S. 576.

[9] *A. Myadzu*, Ing.-Arch. 7 (1936), S. 35.

[10] *R. Herrmann*, Experimentelle Untersuchung zum Widerstandsgesetz des Kreisrohres bei hohen Reynoldsschen Zahlen und großen Anlauflängen, Dissertation, Leipzig (1930).

[11] *A. K. Ray*, Einfluß der Bohrlochgröße auf die Anzeige des statischen Druckes für verschiedene Reynoldszahlen, Dissertation, Göttingen (1955).

[12] *W. Lincke*, Physik. Z. 32 (1931), S. 905.

Stelle zunächst nicht bekannt ist, wurde bei den Experimenten der Außendruck in Schlitzmitte mit dem angezeigten Druck verglichen. Aus der hier beobachteten Druckdifferenz kann dann bei bekanntem Druckgradient der Außenströmung die Stelle des Druckgleichgewichtes berechnet werden.

Im Folgenden wird nun zunächst der theoretisch zu erwartende Einfluß der Sekundärströmung im Schlitz auf die Druckentnahme für eine Strömung ohne und mit Druckgradient qualitativ geschildert. Anschließend wird eine Versuchseinrichtung beschrieben, mit der die Stelle des Druckgleichgewichtes in Abhängigkeit von der *Reynolds*chen Zahl bei verschiedenen Druckgradienten ermittelt werden kann, und im letzten Abschnitt wird das experimentelle Ergebnis mit den theoretischen Vorstellungen verglichen.

2. Verhalten bei konstantem Druck. Im Innern des Schlitzes wird sich infolge der Reibung eine stationäre Strömung ausbilden, wie sie schematisch in Abb. 1 gezeigt ist. Der Antrieb durch die Reibungskräfte der äußeren Strömung wird ausgeglichen durch die Haftreibung an den Seitenwänden des Schlitzes. In den tieferen Teilen des Schlitzes muß sich dann aus Kontinuitätsgründen eine Rückströmung ausbilden. Im mittleren Teil des Schlitzes erhalten wir also etwa ein Geschwindigkeitsprofil wie es in Abb. 2 gestrichelt eingezeichnet ist.

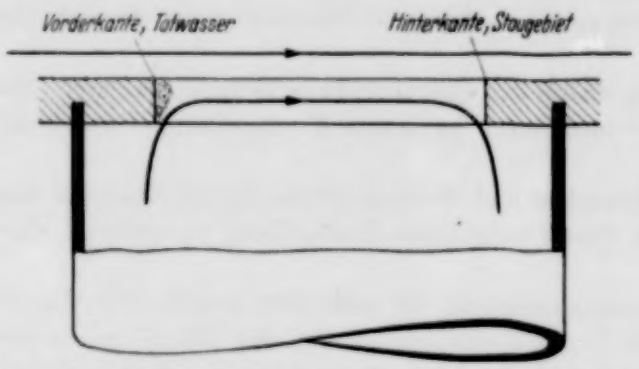


Abb. 1. Druckstörungen an den Schlitzenden.

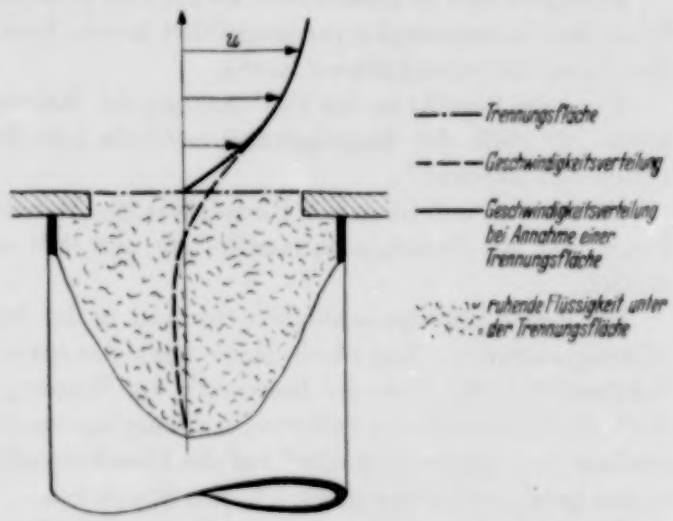


Abb. 2 (rechts). Geschwindigkeitsverteilung im mittleren Teil des Schlitzes.

Wir denken uns nun die Schlitzvorkammer sehr lang und breit. Mit wachsender Tiefe klingt die Rückströmung infolge von Reibungswiderständen immer mehr ab, so daß schließlich die Flüssigkeit ruht. Dabei wird die kinetische Energie, die die bewegten Flüssigkeitsteilchen aus der Außenströmung erhalten haben, in Wärme verwandelt und kann daher nicht zu einer Änderung des hydrostatischen Drucks weit unten in der Manometer-Leitung beitragen. Der durch die Wandöffnung entnommene Druck muß dem in der Wandöffnung gemittelten entsprechen.

Im mittleren Teil des Schlitzes stimmt der Druck mit dem konstanten Druck der ungestörten Außenströmung überein, da alle Stromlinien parallel sind. An der Schlitzvorderkante entsteht ein Totwasser mit Unterdruck (Abb. 1), an der Schlitzhinterkante ein Staugebiet mit Überdruck. Bei der Mittelung des Drucks heben sich beide Störungen teilweise auf. Die verbleibende Differenz ist meist positiv und erzeugt bei kurzen Schlitzen einen entsprechenden Druckunterschied. Die Haftbedingung an den Schlitzseitenwänden läßt nun nur einen Störbereich in Größenordnung der Schlitzbreite zu. Die Störungen an den Schlitzenden klingen daher in einem Bereich ab, der der Schlitzbreite b proportional ist. Je länger nun der Schlitz im Verhältnis zu seiner Breite ist, um so mehr überwiegt die fehlerfreie Drucküberträgung im mittleren Teil gegenüber den störenden Einflüssen an den Enden. Es ist daher zu erwarten, daß die Differenz zwischen dem Außendruck in Schlitzmitte und dem im Schlitz angezeigtem Druck, die von der Strömung im Schlitzinneren herrührt, mit wachsendem Verhältnis l/b (Schlitzlänge zu Schlitzbreite) immer kleiner wird.

3. Verhalten bei Druckgefälle. Zur Vereinfachung der folgenden Überlegungen soll die Strömung im Schlitz durch die Annahme einer Trennungsfläche idealisiert werden. Wie in Abb. 2 angedeutet, ersetzen wir die tatsächliche Geschwindigkeitsverteilung durch eine, die einen Knick hat. Die Trennungsfläche ist dann der geometrische Ort dieses Knicks und trennt die ruhenden und bewegten Flüssigkeitsteilchen innerhalb und außerhalb des Schlitzes.

Unter der Wirkung der verschiedenen Außendrücke wird sich diese Trennungsfläche so verwölben, daß sich durch die Zentrifugalkräfte in den gekrümmten Stromlinien der Außenströmung ein stetiger

Übergang vom variablen Druck der Außenströmung auf den konstanten Druck unter der Trennungsfläche einstellt (Abb. 3). Überall, wo der Außendruck $p(x)$ höher ist als der konstante Innendruck p_i, wird die Trennungsfläche nach innen gedrückt und erscheint, von außen gesehen, konvex gekrümmt. Dort, wo der Außendruck kleiner als der Innendruck ist, wird die Trennungsfläche konkav gekrümmt. Ein Wendepunkt bezeichnet die Stelle $x = x_w$, an der Innen- und Außendruck übereinstimmen $(p_i = p(x_w))$.

Zunächst werde eine Strömung mit Druckabfall in Strömungsrichtung betrachtet. An der Vorderkante des Schlitzes beginnt die Trennungsfläche und krümmt sich konvex in den Schlitz hinein. Entspräche der Innendruck dem Außendruck in Schlitzmitte, so läge der Wendepunkt in Schlitzmitte, und die Trennungsfläche würde unterhalb der Wandebene enden. Die außen vorbeiströmende Flüssigkeit staut sich an der Hinterkante. Eine entsprechende Druckerhöhung des Innendrucks p, der ja dem Druckmittel entspricht, verschiebt den Wendepunkt in das Gebiet höheren Druckes, also in Richtung auf die Vorderkante. Dadurch nähert sich das hintere Ende der Trennungsfläche der Wandebene und der Aufstau am Schlitzende wird kleiner. Es wird sich also ein solcher Innendruck einstellen, der einem Außendruck stromaufwärts der Schlitzmitte entspricht. Zwischen der Lage x_w dieses Gleichgewichtspunktes und der Druckdifferenz Δp zwischen dem ursprünglichen Druck p_0 in Schlitzmitte und dem angezeigten Druck p_i besteht die Bezeichnung (Abb. 3)

$$\Delta p = p_0 - p_i = - x_w \frac{\partial p}{\partial x} . \qquad (1)$$

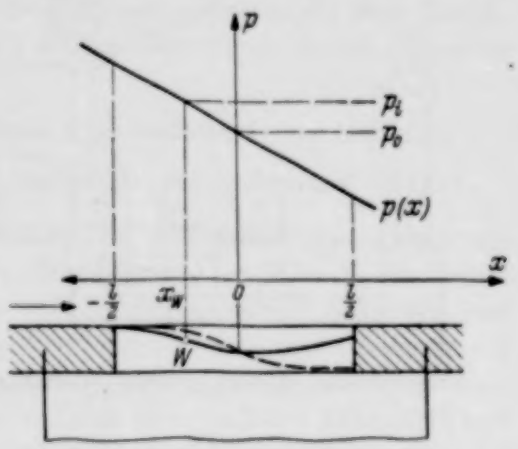


Abb. 3. Verwölbung einer Trennungsfläche bei Druckabfall.

Bei einer Strömung mit Druckanstieg in Strömungsrichtung $(\partial p/\partial x > 0)$ würde sich auf Grund der gleichen Überlegungen eine Trennungsfläche ergeben, die etwa spiegelbildlich zur ersten verläuft. Bei einem Innendruck, der dem Außendruck in Schlitzmitte entspricht, endet die Trennungsfläche oberhalb der Wandebene. Es ergibt sich eine störende Saugwirkung. Der Wendepunkt wandert in das Gebiet kleineren Druckes, erscheint also wieder in Richtung auf die Vorderkante verschoben. Der Faktor x_w in Gleichung (1) ist stets negativ. Andererseits kann man sich nur sehr schwer einen Mechanismus vorstellen, bei dem der Gleichgewichtspunkt vor der Schlitzvorderkante liegt. Für die Lage des Druckgleichgewichtes ergibt sich demnach folgende Abschätzung:

$$-\frac{1}{2} < \frac{x_w}{l} < 0 . \qquad (2)$$

4. Versuchseinrichtung. Die Versuche beziehen sich auf die Druckentnahme aus einer laminaren Grenzschicht. Als Außenströmung wurde die Strömung in einem langen, flachen, rechteckigen Kanal (Querschnitt 18 × 170 mm), Abb. 4, gewählt. Das Geschwindigkeitsprofil der ungestörten Außenströmung entspricht der voll ausgebildeten laminaren Strömung zwischen zwei unendlich breiten, parallelen Wänden. Die Dicke einer vergleichbaren Grenzschicht entspräche größenordnungsmäßig einer halben Kanalhöhe, also etwa 9 mm. Als Versuchsflüssigkeit wurden zwei verschiedene Schmieröle verwandt, deren kinematische Zähigkeit in Abhängigkeit von der Temperatur in Abb. 5 dargestellt wurde. Mit Hilfe der Erwärmung des Öls beim Betrieb und durch Drosselung der Durchflußmenge war es möglich, die auf den gleichwertigen Durchmesser und auf die mittlere Durchflußgeschwindigkeit $\bar{u}$ bezogene *Reynolds*sche Zahl $Re = \bar{u}\, d_{gl}/\nu$ der Kanal-Strömung in den Grenzen

$$50 \leqq Re \leqq 2200$$

zu variieren.

Der Druckgradient der Kanalströmung ist immer negativ. Um auch Strömungen mit positivem Druckgradienten verwirklichen zu können, wurden noch zwei schlanke Diffusoreneinsätze mit den Erweiterungswinkeln 3°28′ und 5°14′ verwandt (Abb. 4).

Die untersuchten Schlitze waren geometrisch ähnlich. Ihre Form ist aus Abb. 6 und ihre Anordnung im Boden des Kanals aus Abb. 7 zu ersehen.

Als Maß der Schlitze möge die Schlitzbreite b dienen. Sie variiert von 2 bis 10 mm und ist damit kleiner oder gerade so groß wie die halbe Kanalhöhe $h/2 = 9$ mm, die die Grenzschichtdicke vertritt.

Die in Abb. 7 ebenfalls eingezeichneten drei Vergleichslöcher dienen zur Bestimmung des statischen Druckes im Kanalquerschnitt. Sämtliche Druckanbohrungen im Kanalboden sind so weit von den

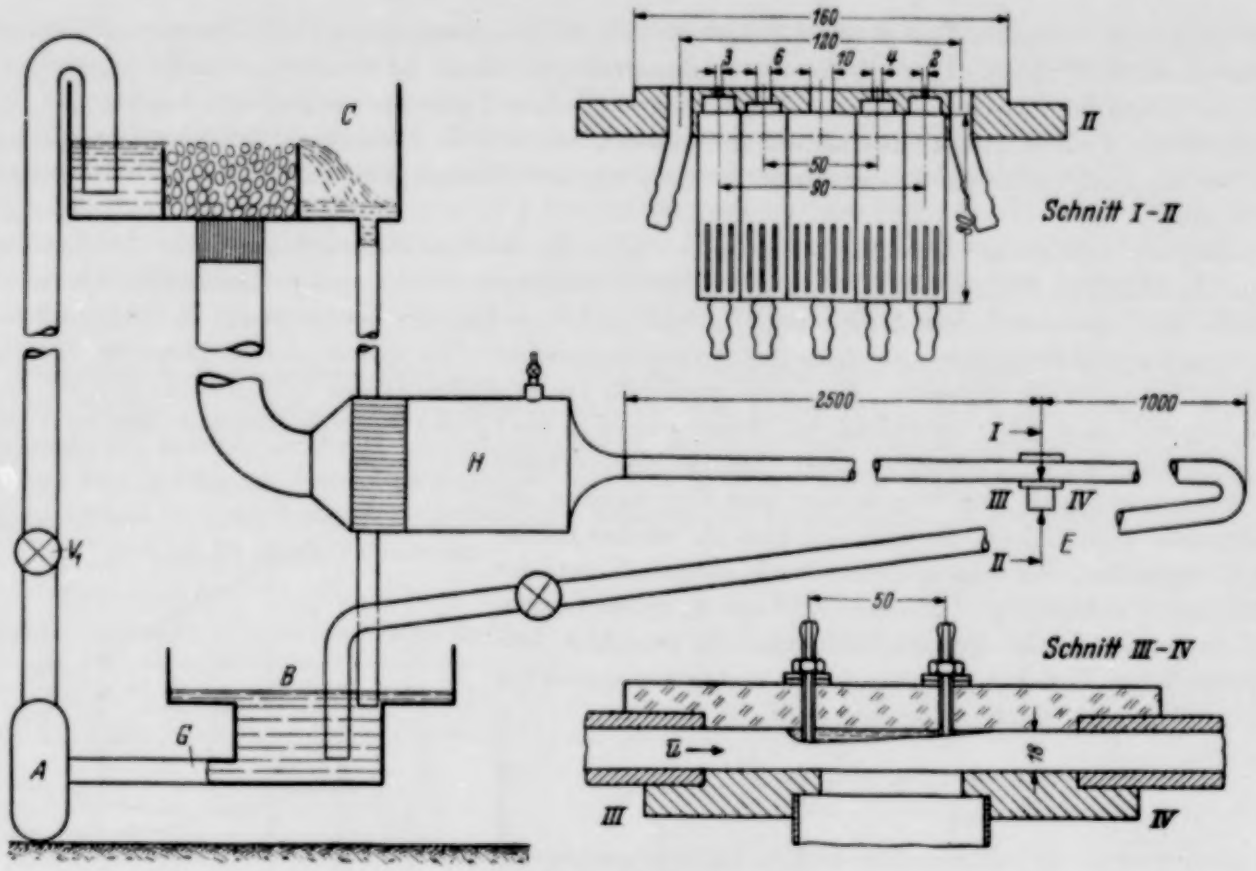


Abb. 4. Versuchsanordnung.

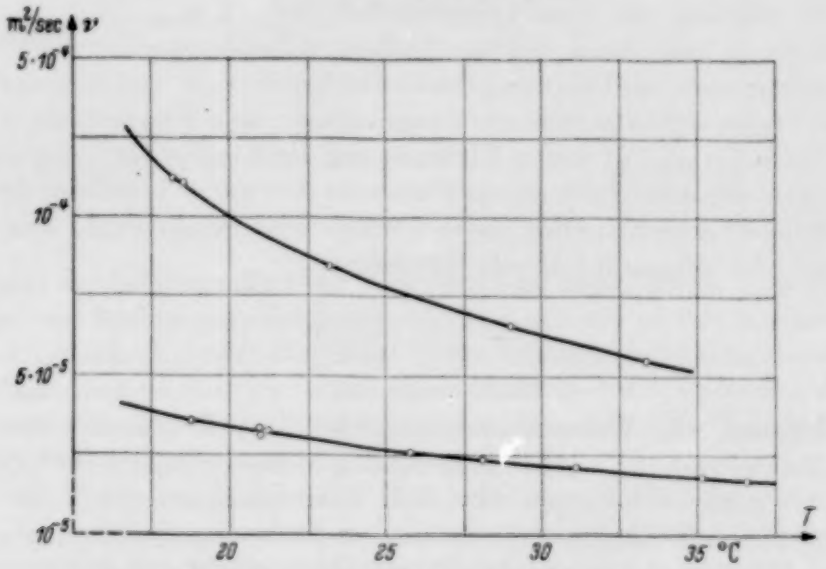


Abb. 5. Kinematische Zähigkeit der Meßflüssigkeit.

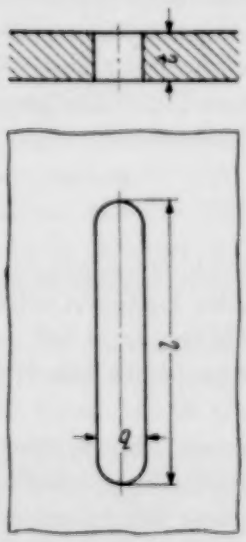


Abb. 6. Schlitzabmessungen.

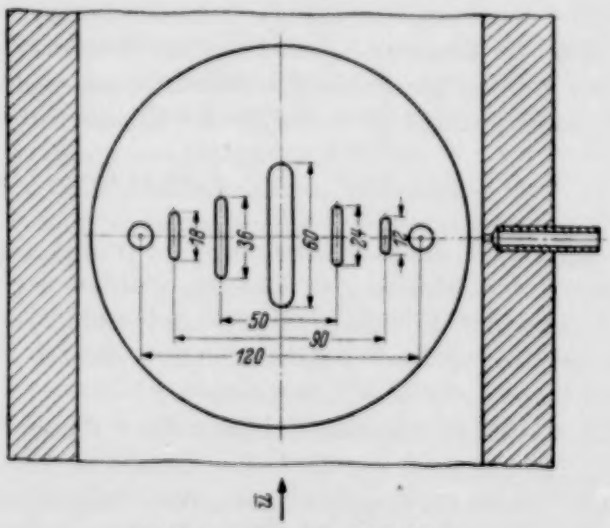


Abb. 7. Anordnung der Meßschlitze.

Kanalseitenwänden entfernt, daß die Änderung der Wandschubspannung im Kanalquerschnitt vernachlässigbar ist.

Die im ersten Abschnitt geforderte weite und lange Schlitzvorkammer wurde durch Beruhigungskammern verwirklicht, wie sie im Schnitt in Abb. 4 gezeigt sind. Die Kammern sind tiefer als der größte Schlitz lang ist und enthalten zusätzlich noch Bleche, um die Rückströmung in der Kammer mit Sicherheit durch Reibung abbremsen zu können. Erst durch diese Maßnahme wurden die Messungen reproduzierbar.

5. Messungen. Gemessen wurde:

1. die Druckdifferenz zwischen einem Schlitz von der Breite b und dem seitlich daneben in Schlitzmitte liegenden Vergleichsloch

$$\Delta p^+ = p_{Vergleichsloch} - p_i ; \tag{3}$$

2. der Druckgradient $\partial p/\partial x$ im glatten Kanal und im Falle der Diffusoreneinsätze die dem Druckgradienten entsprechende Druckdifferenz Δp_L zwischen den beiden Wandbohrungen an der Oberseite des Diffusors, die $L = 5$ cm voneinander entfernt waren;

3. die Temperatur der Meßflüssigkeit T mit einem Thermometer stromabwärts der Schlitze;

4. die Dichte ϱ [kpsec²/m⁴] der Meßflüssigkeit mit einem Aräometer im großen Sammelbehälter.

Bei der Bestimmung der gesuchten Druckdifferenz $\Delta p = p_0 - p_i$ besteht eine Schwierigkeit zunächst darin, daß der Druckentnahmefehler des Vergleichsloches nicht bekannt ist. Um diesen Fehler zu bestimmen, wurde die Druckdifferenz Δp^+ für alle 5 Schlitze möglichst gleichzeitig gemessen und über der Schlitzbreite aufgetragen (Abb. 8a). Der Fehler des Vergleichsloches wurde dann durch lineare Extrapolation auf die Schlitzgröße $b = 0$ ermittelt. Um den so ermittelten Fehler zu prüfen, wurde die Messung dann bei ungefähr der gleichen *Reynolds*chen Zahl, aber anderer Zähigkeit und anderem Staudruck wiederholt, und der zu dem neuen Staudruck gehörende Vergleichslochfehler wieder durch die gleiche lineare Extrapolation ermittelt. Mit Hilfe der beiden so gewonnenen Vergleichslochfehler wurde aus der gemessenen Druckdifferenz Δp^+ dann die gesuchte Druckdifferenz Δp berechnet, und das Ergebnis beider Eliminationsverfahren dimensionslos ($Re\,\Delta p/q$) aufgetragen (Abb. 8b). Bei dieser Darstellung wichen die Meßpunkte der beiden Verfahren nicht allzu viel voneinander ab. Dabei ist der Unterschied, wie sich später zeigen wird, zum Teil auf die doch etwas verschiedenen *Re*-Werte zurückzuführen. Damit erscheint die lineare Extrapolation in erster Näherung berechtigt.

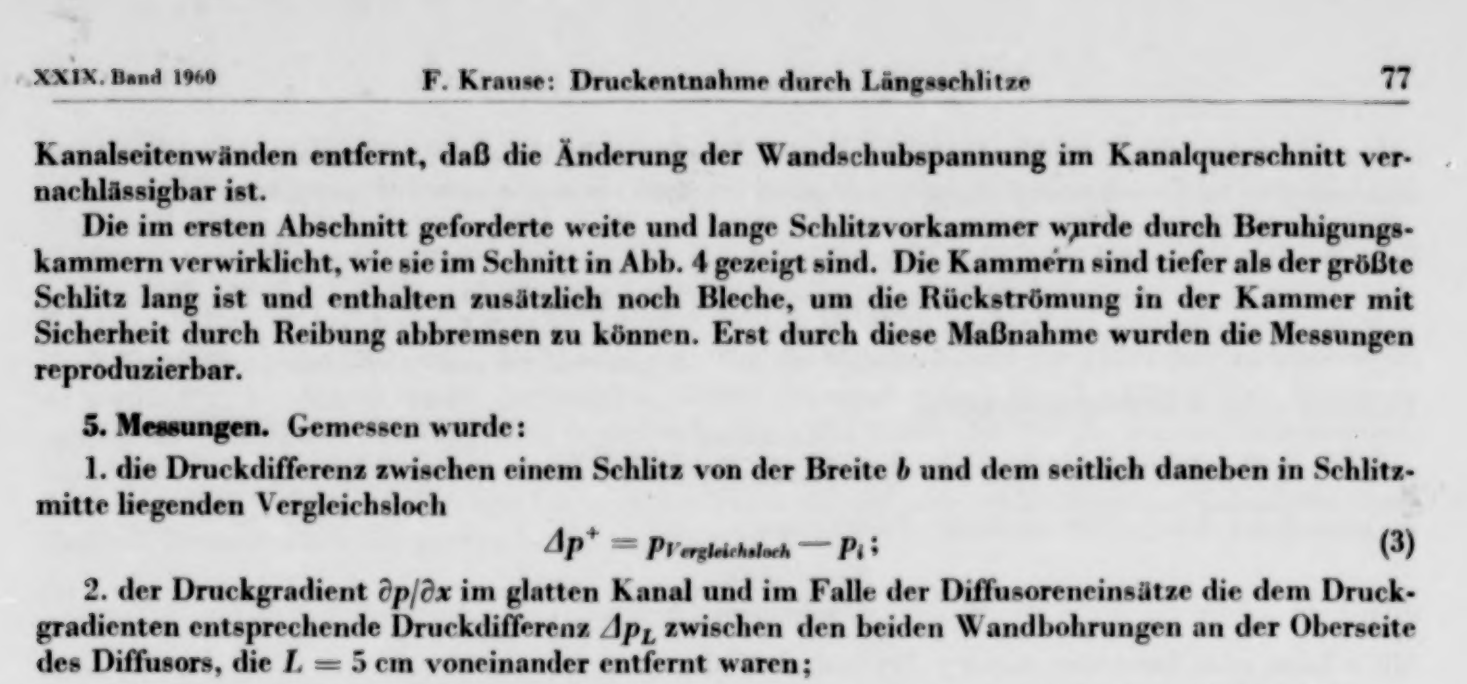


Abb. 8. Lineare Extrapolation. a) Direkte Messung; b) Dimensionslose Darstellung.

Die Dichten der beiden Ölsorten unterscheiden sich kaum voneinander und waren fast temperaturunabhängig. Es genügte, mit der mittleren Dichte $\varrho = 89{,}0$ kpsec²/m⁴ zu rechnen. Die kinematische Zähigkeit ν ist, der konstanten Dichte wegen, eine Funktion der Temperatur T allein, so daß nach einer einmaligen Eichung (Abb. 5) die Messung der Öltemperatur eine Zähigkeitsmessung ersetzt.

Der Druckgradient $\partial p/\partial x$ wurde im glatten Kanal mit Hilfe von Wandanbohrungen direkt gemessen. Die mittlere Durchflußgeschwindigkeit im Kanal $\bar{u}$ ergibt sich dann aus dem Widerstandsgesetz der laminaren Rohrströmung[1]:

$$\frac{\frac{\partial p}{\partial x} d_{gl}}{\varrho/2\,\bar{u}^2} = \lambda(Re) = \left[0{,}9 + 0{,}6\left(\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}\right)^2\right] \frac{64}{\frac{\bar{u}\, d_{gl}}{\nu}}. \tag{4}$$

Dabei ist $\varkappa$ das Kanalseitenverhältnis

$$\varkappa = \frac{\text{Kanalhöhe}}{\text{Kanalbreite}} = 0{,}106\,, \tag{5}$$

d_{gl} bezeichnet den „gleichwertigen" Durchmesser

$$d_{gl} = 4 \cdot \frac{\text{Kanalfläche}}{\text{Kanalumfang}} = 3{,}25 \cdot 10^{-2}\ \text{m}\,. \tag{6}$$

Mit u kann man dann eine mittlere *Reynolds*sche Zahl

$$Re = \frac{\bar{u}\, d_{gl}}{\nu} \tag{7}$$

und einen mittleren Staudruck

$$q = \frac{\varrho}{2}\bar{u}^2 \tag{8}$$

ausrechnen.

Im Falle der Diffusorströmung konnten die entsprechenden Mittelwerte leider nur abgeschätzt werden.

An Stelle der wirklichen Druckgradienten im Diffusor wurde die Druckdifferenz Δp_L, die an der Oberseite des Diffusoreinsatzes gemessen wurde, mit dem Abstand L dieser Meßbohrung diffidiert. Es ergibt sich ein Näherungswert

$$\frac{\partial p}{\partial x_{D_i}} \approx \frac{\Delta p_L}{L} \tag{9}$$

für den Druckgradienten, der wahrscheinlich kleiner ist als der wirkliche Druckgradient.

Die mittlere Geschwindigkeit $\bar{u}_{Di}$ bezieht sich auf die Diffusorhöhe $\bar{h}_{Di}$ des Diffusorquerschnitts, der in der Mittelebene der fünf Meßschlitze liegt.

Ebene Strömung vorausgesetzt ergibt sich

$$\frac{\bar{u}_{Di}}{\bar{u}} = \left(\frac{q_{Di}}{\bar{q}}\right)^{1/2} = \frac{\text{mittl. Diffusorhöhe}}{\text{Kanalhöhe}} = \begin{cases} 1{,}14 \text{ für Diffusorerweiterung } 3°28', \\ 1{,}21 \text{ für Diffusorerweiterung } 5°14'. \end{cases} \tag{10}$$

Mit der so definierten mittleren Geschwindigkeit ist auch der entsprechende Staudruck $\bar{q}_{Di} = \frac{\varrho}{2}\bar{u}_{Di}^2$ gegeben.

Die *Reynolds*schen Zahlen Re_{Di} im mittleren Diffusorquerschnitt und Re im stromaufwärts gelegenen Kanalquerschnitt stimmen in ebener Strömung aus Kontinuitätsgründen überein:

$$Re = Re_{Di} \tag{11}$$

Damit sind die gesuchten Mittelwerte der Diffusorströmung auf die bekannten Größen eines stromaufwärts liegenden Kanalquerschnitts zurückgeführt.

Anzumerken ist noch, daß die Messung der Druckdifferenz Δp^+ durch Schwankungen des statischen Druckes stark gestört werden kann. Die gleiche Schwankungsamplitude verändert zeitlich die Druckanzeige des Vergleichsloches in anderer Weise als die der viel größeren Schlitze.

Als Ursache dieser Druckschwankungen stellten sich mitgerissene Luftbläschen und der Durchfluß sich ausbreitender Turbulenzgebiete heraus.[2]

Mitgerissene Luftbläschen änderten die Fördermenge der benutzten Schleuderpumpe erheblich. Zu ihrer Beseitigung wurde (Abb. 4) der Sammelbehälter B unstetig verengt, um genügend Druck im Einlaufrohr G zur Pumpe A zu haben. Weiterhin wurde der Überlauf C so unterteilt, daß ein weiteres Beruhigungsbecken für das zulaufende Öl entstand und ein drittes Beruhigungsgefäß H wurde vor dem Einlauf der Meßstrecke eingeschaltet. Außerdem wurde im Überlaufbecken C das Einlaufrohr zur

[1] *A. Betz*, Mechanik unelastischer Flüssigkeiten. Hütte Bd. 1, 28. Aufl., S. 782.
[2] *J. Rotta*, Ing.-Arch. 24 (1956), S. 285.

Meßstrecke mit groben Kieselsteinen überdeckt, damit hier keine Luftbläschen angesaugt werden können. Infolge dieser Maßnahmen entwichen die beim Anstellen des Kanals mitgerissenen Luftbläschen in etwa $^1/_2$ Stunde.

Die sich ausbreitenden Turbulenzpropfen können nicht vermieden werden und lassen die bei größeren Re_u-Werten gemessenen Druckunterschiede etwas fragwürdig erscheinen.

6. Darstellung und Diskussion der Messungen. Um die Meßergebnisse gut übersehen zu können, ist es vernünftig, sie dimensionslos darzustellen. Dabei verwendet man zweckmäßig solche Faktoren, welche die wichtigsten Einflußgrößen berücksichtigen. Die Größe Δp, für die wir uns interessieren, hängt offenbar ab von dem gemessenen Druckabfall $l\,\partial p/\partial x$ längs eines Schlitzes und der *Reynolds*chen Zahl $Re = \bar{u}\,d_{gl}/\nu$. Möglichwerweise hat auch das Verhältnis l/d_{gl} der Schlitzlänge zur Kanalhöhe einen Einfluß, besonders bei den großen Schlitzen. Es wird also

$$\Delta p = F\left(\frac{l\,\partial p}{\partial x}\,;\; Re;\; \frac{l}{d_{gl}}\right) \tag{12}$$

sein.

Die Größe Δp wird am besten mit der Druckänderung über dem Schlitz $(\partial p/\partial x)\,l$ dimensionslos gemacht. Diese Darstellung hat den Vorteil, daß man den Druckgleichgewichtspunkt x_w unmittelbar erkennen kann. Nach (1) und Abb. 3 gilt ja für die Gleichgewichtslage x_w

$$\frac{\Delta p}{\frac{\partial p}{\partial x}\,l} = -\frac{x_w}{l}\,.$$

Der Druckgradient $\partial p/\partial x$ soll so dimensionslos gemacht werden, daß der entsprechende Parameter nicht mehr von der *Reynolds*chen Zahl $Re = \bar{u}\,d_{gl}/\nu$ abhängt. Dazu wird das Widerstandsgesetz $\lambda = \lambda_0/Re$ für laminare Strömungen benutzt. Entsprechend Gleichung (4) ist demnach

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\lambda_o}{Re}\,\frac{q}{d_{gl}}\,.$$

Macht man $\partial p/\partial x$ mit $1/Re\;q/d_{gl}$ dimensionslos, so erhält man

$$\frac{\partial p}{\partial x}\,\frac{Re\;d_{gl}}{q} = \lambda_0\,. \tag{13}$$

In einer glatten Kanalströmung ist λ_0 eine nur vom Kanalquerschnitt abhängige Konstante. In einer laminaren anliegenden Diffusorströmung wird λ_0 außerdem auch noch durch den Diffusorerweiterungswinkel α und durch den Quotienten aus Durchflußmenge Q und kinematischer Zähigkeit ν mitbestimmt.

Für die dimensionslose Darstellung der Meßergebnisse empfiehlt sich also die Form

$$\frac{\Delta p}{\frac{\partial p}{\partial x}\,l} = -\frac{x_w}{l} = f\left(\lambda_0;\, Re;\, \frac{l}{d_{gl}}\right). \tag{14}$$

Da im glatten Kanal λ_0 konstant ist, bleibt nur eine Abhängigkeit von Re und l/d_{gl} übrig. Dementsprechend ist in Abb. 9 $\Delta p/(\partial l/\partial x)$ als einparametrige Kurvenschar abhängig von Re mit dem Parameter l/d_{gl} aufgetragen. Um den Einfluß dieses Parameters übersehen zu können sind jeweils die Geraden $\Delta p/l\;(dp/dx) = 0{,}3$ in Ordinatenrichtung um einen Betrag versetzt, der der Schlitzlänge l direkt proportional ist.

Man erkennt unmittelbar, daß die Gleichgewichtslage x_w/l von der *Reynolds*chen Zahl Re unabhängig ist, solange die mit der Schlitzbreite gebildete *Reynolds*che Zahl den Übergangswert $Re_b = b\,\bar{u}/d_{gl} = 60$ nicht überschreitet. Innerhalb dieses Re-Bereiches ist $-x_w/l$ auch von der dimensionslosen Schlitzlänge l/d_{gl} unabhängig, wenn die Schlitzgröße $l/d_{gl} \leqq 1{,}1$ bleibt. In diesem Bereich ergibt sich

$$\frac{\Delta p}{l\,\frac{dp}{dx}} = -\frac{x_w}{l} = 0{,}39\,. \tag{15}$$

Der Gleichgewichtspunkt zwischen angezeigtem Druck und Druck der Außenströmung ist bei allen Schlitzen um 39% der Schlitzlänge von der Mitte in Richtung auf die Vorderkante verschoben. Für Schlitze, bei denen $Re_b = \bar{u}\,b/\nu > 60$, wandert der Gleichgewichtspunkt langsam zur Schlitzmitte.

Die Messungen in den Diffusoreinsätzen können in der dimensionslosen Form (14) nicht recht dargestellt werden. Da sie nämlich vor allem im Hinblick auf Strömungen mit vermindertem Druckgra-

dienten durchgeführt wurden, ist die Bezugsgröße $(\partial p/\partial x)\, l$, die beim glatten Rohr zur dimensionslosen Darstellung der gemessenen Δp-Werte benutzt wurde, oft so klein, daß sie infolge der Meßungenauigkeit erheblich verfälscht werden kann. Als Grundlage für die Darstellung der Diffusormessungen wurde daher die dimensionsbehaftete Form (12) zugrunde gelegt (Abb. 10).

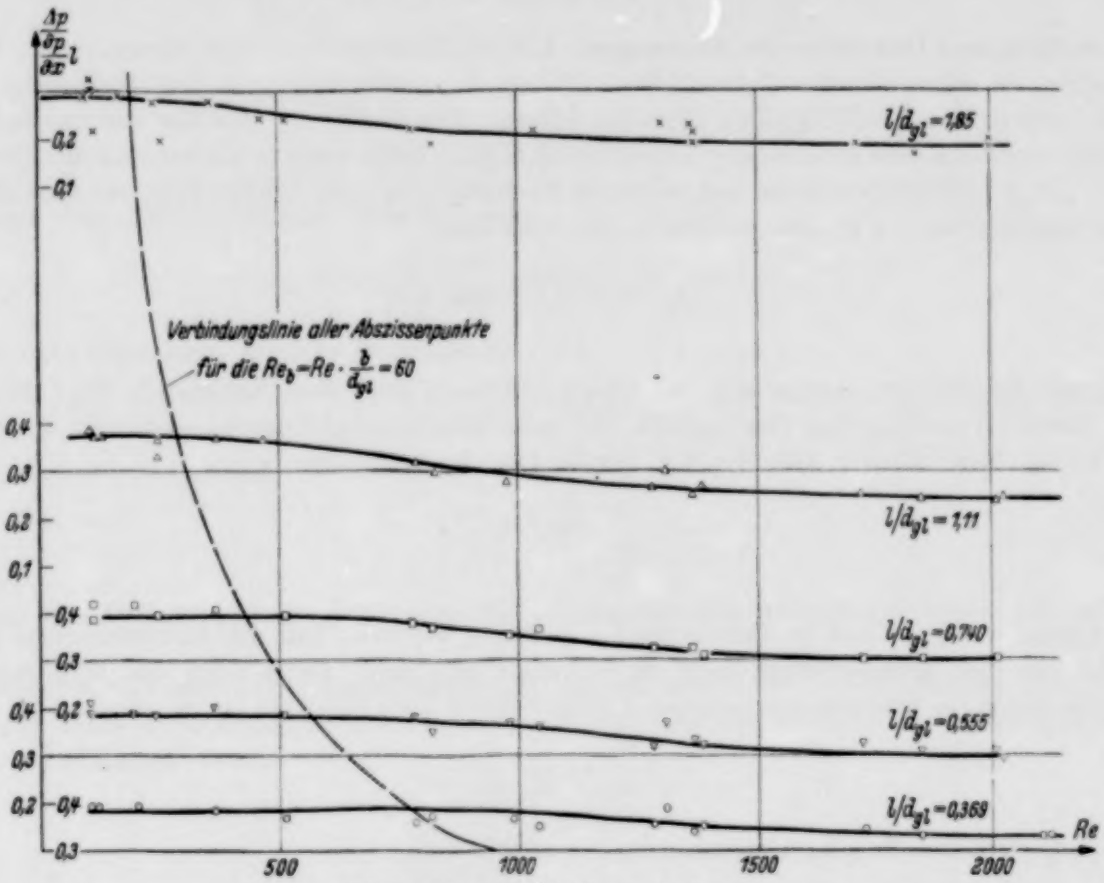


Abb. 9. Meßergebnisse beim glatten Kanal.

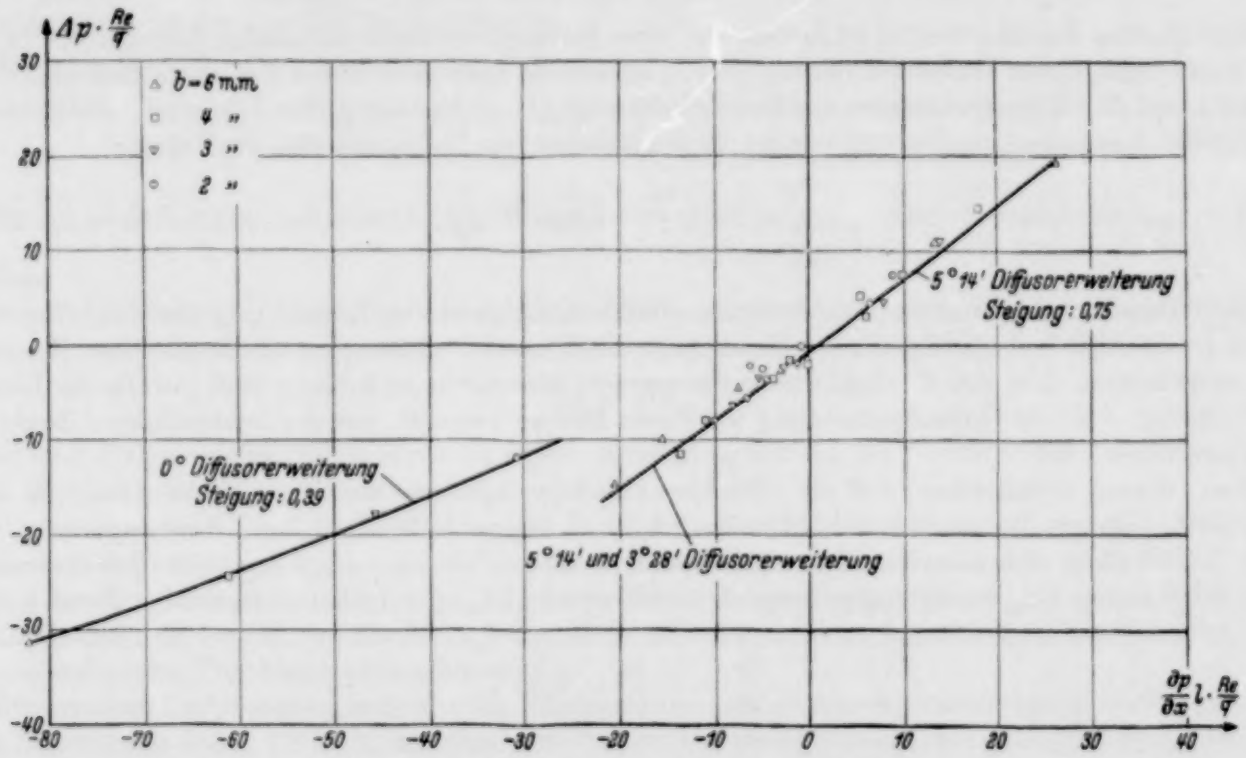


Abb. 10. Meßergebnisse beim Kanal und beim Diffusor.

Bei allen Meßpunkten war $Re_b = \bar{u}\, b/\nu \leqq 60$, und $l/d_{gl} < 1$, so daß die Parameter Re, l/d_{gl} voraussichtlich wieder keinen Einfluß haben. Als unabhängige Veränderliche hätte man dementsprechend die Druckänderung überm Schlitz $(\partial p/\partial x)\, l$ wählen können, als abhängige Veränderliche Δp. Die

Gleichgewichtslage — x_w/l ergäbe sich dann als Tangens des Richtungswinkels, der zu dem entsprechenden Meßpunkt gehört. Um die Darstellung übersichtlicher zu machen, und um wieder dimensionslose Werte zu erhalten, wurden Ordinate und Abzisse noch jeweils mit dem zugehörigen Re/q-Wert multipliziert. Die Tangensbeziehung wird dadurch nicht gestört. Außer den Meßpunkten der Diffusorströmung wurden auch noch einige Meßpunkte der Kanalströmung eingetragen. Sie sind durch „0° Diffusorerweiterung" gekennzeichnet.

Man kann dieser Darstellung folgende Ergebnisse entnehmen:

a) Die bei verschiedenen *Re*-Zahlen und an verschiedenen großen Schlitzen gewonnenen Meßpunkte fallen unmittelbar zusammen. Auch für die Druckentnahme aus einer Diffusorströmung gilt, daß das Ergebnis von der *Reynolds*chen Zahl *Re* und der dimensionslosen Schlitzlänge l/d_{gl} unabhängig ist, solange *Reb* kleiner als etwa 60 bleibt, und $l/d_{gl} \leqq 1 \cdot 1$ ist.

b) Die Meßpunkte lassen sich durch Kurven annähern, die innerhalb der Meßgenauigkeit durch den Nullpunkt gehen. Die Druckdifferenz Δp ist also, wie erwartet, in einer Strömung ohne Druckgradient sehr klein.

c) Die positive Steigung der Näherungskurven bedeutet, daß der Punkt x_w des Druckgleichgewichts stromaufwärts der Schlitzmitte liegt, im Einklang mit den theoretischen Überlegungen.

d) Die Näherungskurven sind Gerade durch den Nullpunkt. Das bedeutet, daß die Lage des Druckgleichgewichts im Bereich der gemessenen Druckgradienten von diesen unabhängig ist. Die Linearität bleibt auch dann noch erhalten, wenn der Druckanstieg bis fast zur Ablösung und Rückströmung gesteigert wurde.

e) Die Steigung der Geraden, die die in den beiden Diffusoreinsätzen bestimmten Meßpunkte annähert, beträgt rd. 0,75. Das würde bedeuten, daß der Druckgleichgewichtspunkt 25% der Schlitzlänge stromaufwärts vor der Vorderkante liegt. Das ist sehr unwahrscheinlich. Der gemessene Druckgradient $\Delta p_L/L$ ist vermutlich zu klein. Wahrscheinlich liegt das daran, daß die vordere Druckanbohrung S_1 (Abb. 4) aus Raumgründen zu weit nach vorn gelegt wurde. Die Druckverteilung längs des Diffusoreinsatzes besitzt ähnlich wie ein endlich dickes symmetrisches Profil in Nähe der Vorderkante eine ausgesprochene Saugspitze. Die Tatsache, daß der gemessene Druckgradient wesentlich zu klein ist, deutet darauf hin, daß die vordere Bohrung S_1 den Druck stromaufwärts der Saugspitze gemessen hat. Bei korrekter Durchführung der Diffusormessungen würde sich wahrscheinlich dieselbe Lage des Druckgleichgewichts ergeben; wie sie im glatten Kanal gemessen wurde.

7. Zusammenfassung. Ziel der vorliegenden Arbeit war, die Fehler zu untersuchen, die bei der Druckentnahme durch einen langen Schlitz durch die Sekundärströmung im und in Nähe des Schlitzes hervorgerufen werden. Insbesondere sollte die theoretisch gewonnene Vermutung experimentell geprüft werden, daß der angezeigte Druck dem Druck der ursprünglichen Strömung an einer Stelle entspricht, die zwischen Schlitzvorderkante und Schlitzmitte liegt.

Die Druckdifferenz Δp zwischen Außendruck in Schlitzmitte und angezeigtem Druck wurde für 5 geometrisch ähnliche Schlitze ($l/b = 6$, $t/b = 1$) in einer laminaren Kanal- und Diffusorströmung gemessen. Die qualitativen theoretischen Überlegungen werden bestätigt, der Druckunterschied hängt in erster Linie von der Druckänderung über dem Schlitz ab und verschwindet in einer Strömung ohne Druckgradient. Das Druckgleichgewicht befindet sich an einer Stelle, die in gewissen Grenzen unabhängig vom Druckgradienten 11% der Schlitzlänge hinter der Vorderkante liegt. Voraussetzung ist allerdings, daß die Rückströmung im Schlitzinnern durch Reibung genügend gebremst wird und eine gewisse *Reynolds*che Zahl der Schlitzbreite

$$\frac{\bar{u}\, b}{\nu} \approx 60$$

nicht überschritten wird.

Hiermit danke ich Herrn Professor Dr. *Betz* herzlich für die Anregung und stete Förderung der Arbeit. Weiterhin danke ich den Mitarbeitern des Max-Planck-Instituts für Strömungsforschung und der Aerodynamischen Versuchsanstalt für ihren hilfreichen Rat bei der Durchführung. Außerdem möchte ich der BV-ARAL Aktiengesellschaft für die Spende von 550 kg Hochleistungsöl danken, das für die Versuche besonders geeignet war.

(Eingegangen am 9. Mai 1959.)

Anschrift des Verfassers: Dipl.-Phys. *Fritz Krause*, Göttingen, Bunsenstr. 10.

Ergänzungen zum Grenzschichtquadraturverfahren von E. Truckenbrodt*

Von N. Scholz

1. Einleitung. In der Entwicklung der Berechnungsverfahren für die Grenzschicht kann man insbesondere im Hinblick auf turbulente Grenzschichten zwei Richtungen unterscheiden: Einerseits wird durch eine Verfeinerung des als Grundlage dienenden physikalischen Inhaltes der Ausgangsgleichungen eine bessere Übereinstimmung der Rechenergebnisse mit der Wirklichkeit angestrebt. Andererseits soll eine möglichst weitgehende Vereinfachung und Vereinheitlichung des Rechenganges erreicht werden, so daß diese Verfahren nicht nur von Spezialisten gehandhabt, sondern in der ingenieurmäßigen Praxis von Hilfskräften oder Rechenanlagen mit lohnendem Aufwand ausgeführt werden können. Wegen der einheitlichen Behandlung laminarer und turbulenter Grenzschichten im ebenen und rotationssymmetrischen Fall erscheint das von *E. Truckenbrodt*[1] entwickelte Quadraturverfahren im letzteren Sinne besonders geeignet und wurde deshalb auch bereits für umfangreiche systematische Untersuchungen herangezogen[2, 3].

In der vorliegenden Arbeit werden für dieses Verfahren einige Ergänzungen mitgeteilt, die zum einen den Anwendungsbereich erweitern, zum anderen die Treffsicherheit der Ergebnisse verbessern und die numerische Durchführung der Rechnung vereinfachen sollen. Die Kenntnis der *Truckenbrodt*schen Arbeit wird daher vorausgesetzt. Im folgenden werden wir den ebenen und rotationssymmetrischen Fall gemeinsam behandeln. Für den ebenen Fall ist dabei in allen Gleichungen der Wandradius in der Ebene senkrecht zur Strömung R bzw. $R/l = 1$ zu setzen.

2. Bezeichnungen. Es werden folgende Bezeichnungen verwendet:

x und y	Koordinaten in Richtung der Wandbegrenzung und senkrecht dazu,
l	Bezugslänge, im allgemeinen Länge der betrachteten Grenzschicht,
$R(x)$	Wandradius bei rotationssymmetrischen Begrenzungen,
$U(x)$, $\varrho(x)$, $T(x)$	Geschwindigkeit, Dichte und Temperatur außerhalb der Grenzschicht,
$u(y)$, $\varrho(y)$, $T(y)$	Geschwindigkeit, Dichte und Temperatur innerhalb eines Grenzschichtprofiles,
T_0, T_W, T_r, T_B	Temperaturen des Strömungsmittels bei isentropem Aufstau, an der Wand, an der Wand infolge Reibungswärme und Bezugstemperatur nach Gleichung (5),
$\delta, \delta^*, \vartheta, \overline{\delta}$	Grenzschichtdicke, Verdrängungsdicke, Impulsverlustdicke und Energieverlustdicke des Strömungsgrenzschichtprofiles,
δ_T, $\overline{\delta}_T$	Dicke und Wärmegewinndicke des Temperaturgrenzschichtprofiles,
k_s	Korngröße der der Wandrauhigkeit äquivalenten Sandrauhigkeit,
$c_{f\infty}$	Dimensionsloser Reibungswiderstandsbeiwert der Gleichdruckgrenzschicht (ebene Platte),
c_f	Dimensionsloser Schubspannungsbeiwert,
$H = \delta^*/\vartheta$, $\overline{H} = \overline{\delta}/\vartheta$	Grenzschichtdickenverhältnisse,
$\overline{H}_T = \overline{\delta}_T/\overline{\delta}$	Verhältnisgröße zwischen Temperatur- und Strömungsgrenzschichtprofil,
L	Formparameter des Grenzschichtprofiles nach Gleichung (18),
n, $\overline{n}$	Exponenten des Dissipations- und des Widerstandsgesetzes,
ω	Exponent des Zähigkeitsgesetzes als Funktion der absoluten Temperatur,
$\varkappa$	Isentropenexponent,
α, a, b, d, e, A, B	Konstanten,
C, k, p, q, m, c	Exponenten,
$\Theta, \Lambda, \xi = \Theta^c$	Dimensionslose Größen, definiert durch Gleichung (4) bzw. (23),
$Re_\vartheta = U\,\vartheta/\nu$	örtliche *Reynolds*zahl des Grenzschichtprofiles,
$Re_l = U_\infty\, l/\nu$	Bezugs-*Reynolds*zahl,
Pr	*Prandtl*zahl,
M	*Mach*zahl,
r	Erhitzungsfaktor, definiert durch Gleichung (6).

Als Indizes stehen:

∞	für Größen der Bezugsströmung oder bei einer Grenzschicht mit Gleichdruck,
0	für Größen des Anfangszustandes der Grenzschicht,

* Überarbeitete Fassung eines Berichtes des Institutes für Strömungsmechanik der Technischen Hochschule Braunschweig (Prof. Dr. *H. Schlichting*).

[1] *E. Truckenbrodt*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 211.

[2] *L. Speidel* u. *N. Scholz*, Untersuchungen über die Strömungsverluste in ebenen Schaufelgittern, VDI-Forschungsheft 464 (1957).

[3] *J. Weissinger*, Mitt. Nr. 9 d. Inst. f. angew. Math. d. T. H. Karlsruhe (1958).

$T = T_\infty$ für Größen bei konstanten Stoffeigenschaften (zur Unterscheidung gegenüber entsprechenden Größen bei veränderlichen Stoffeigenschaften),
$'$ für mit der Integrationsvariablen x' veränderlichen Größen,
A für Werte am Ablösungspunkt der Grenzschicht,
ν für Werte am ν-ten Rechenpunkt.

3. Berechnung der Impulsverlustdicke. a) Einfluß des örtlichen Formparameters: Aus der Integration des Energiesatzes der Grenzschicht erhält *E. Truckenbrodt* eine geschlossene Lösung für die Impulsverlustdicke, indem er für den örtlichen Formparameter $\overline{H}(x)$ den konstanten Wert der Gleichdruckgrenzschicht einsetzt. Ohne diese einschränkende Annahme kann die Gleichung für die Impulsverlustdicke $\vartheta(x)$ geschrieben werden[1]:

$$\left(\frac{U\vartheta}{\nu}\right)^n \vartheta = \frac{C_0 + \left(\frac{\overline{H}_\infty}{\overline{H}(x)}\right)^{1+n} \frac{E}{\overline{H}_\infty^{1+n}} \int_{x_0}^{x} U(x')^{3+2n} R(x')^{1+n}\, dx'}{U(x)^{3+2n} R(x)^{1+n}}. \tag{1}$$

Hierbei ist C_0 eine Integrationskonstante für die Impulsverlustdicke bei $x = x_0$. Die zu dieser Gleichung führenden Voraussetzungen, daß nämlich die dimensionslose Dissipation nur eine Funktion der örtlichen *Reynolds*zahl Re_ϑ[2] und die Größe E unabhängig von $\overline{H}$ und damit von der Integrationsvariablen x'[3] sind, können als weitgehend erfüllt angesehen werden[4]. Schreibt man Gleichung (1) für den Gleichdruckfall auf, so ergibt sich sofort die Bedeutung der Größe $E/\overline{H}_\infty^{1+n}$, nämlich wegen $\vartheta_\infty/l = c_{f\infty}/2$

$$\frac{E}{\overline{H}_\infty^{1+n}} = \left(\frac{U_\infty l}{\nu}\right)^n \left(\frac{c_{f\infty}}{2}\right)^{1+n}. \tag{2}$$

Hiermit erhält man eine für praktische Rechnungen bequeme Gleichung für die Impulsverlustdicke in der Form[5]

$$\frac{\overline{\delta}(x)}{l} = \overline{H}(x)\frac{\vartheta(x)}{l} = \overline{H}_\infty \frac{c_{f\infty}}{2} \frac{\Theta^{\frac{1}{1+n}}}{\left(\frac{U(x)}{U_\infty}\right)^3 \frac{R(x)}{l}} \tag{3}$$

mit

$$\Theta(x) = \left[\frac{2}{c_{f\infty}} \frac{\vartheta_0}{l} \frac{\overline{H}_0}{\overline{H}_\infty} \left(\frac{U_0}{U_\infty}\right)^3 \frac{R_0}{l}\right]^{1+n} + \int_{x_0}^{x} \left(\frac{U(x')}{U_\infty}\right)^{3+2n} \left(\frac{R(x')}{l}\right)^{1+n} d\frac{x'}{l} \tag{4}$$

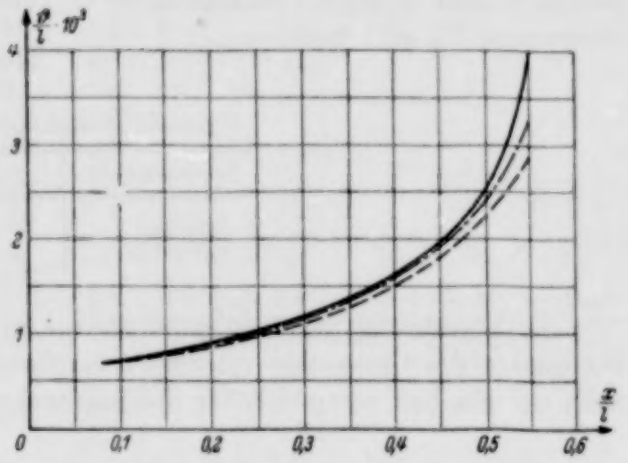


Abb. 1. Impulsverlustdicke der turbulenten Reibungsschicht am Profil NACA 65(216)—222. $\alpha = 10{,}1°$, $Re\,l = 2{,}6\ 10^6$, —— Messung nach NACA-Rep. 772, — — — Rechnung nach *Truckenbrodt*, — . — Rechnung nach Gleichung (3).

Gegenüber *Truckenbrodt* enthält Gleichung (3) das Glied $\overline{H}_\infty/\overline{H}(x)$, das den Einfluß des örtlichen Formparameters auf die Impulsverlustdicke darstellt und im Druckanstieggebiet wegen $\overline{H}/\overline{H}_\infty < 1$ den Impulsverlust erhöht. Abb. 1 zeigt für das Rechenbeispiel von *Truckenbrodt* (dort Abb. 15) die Verbesserung, die durch Gleichung (3) erzielt wird[6]. Bei der Berechnung von ϑ ist zunächst die Quadraturgröße $\Theta(x)$ zu ermitteln. Mit dieser kann, wie im folgenden noch gezeigt wird, die Quadratur des Formparameters erfolgen, und anschließend mit $\overline{H}(x)$ die Impulsverlustdicke erhalten werden. Damit ist keine Koppelung der beiden zu lösenden Gleichungen für die Impulsverlustdicke und den Formparameter vorhanden, so daß ein iterativer Lösungsgang nicht erforderlich ist.

---

[1] Siehe Fußnote 1 von Seite 82; dort Gleichung (34).
[2] Siehe Fußnote 1 von Seite 82, dort Abb. 2 im laminaren und Abb. 4 im turbulenten Fall.
[3] Siehe Fußnote 1 von Seite 82, dort Abb. 6.
[4] Nur im laminaren Fall ist E im Druckabfallbereich etwas von $\overline{H}$ abhängig.
[5] Hierbei ist zur Vereinheitlichung des Rechenganges in der Integrationskonstanten $\overline{H}(x) \approx \overline{H}_0$ gesetzt worden. Diese Vereinfachung ist einerseits für Werte von x nahe bei x_0 gerechtfertigt, andererseits spielt für größere Lauflängen $x - x_0$ die Integrationskonstante gegenüber dem Integralwert eine immer untergeordnetere Rolle.
[6] Die von *Truckenbrodt* (Abb. 14) erzielte gute Übereinstimmung für die laminare Grenzschicht der *Howarth* Strömung wird auch mit Gleichung (3) nicht schlechter, da hierbei $\overline{H}/\overline{H}_\infty$ zwischen 1,00 und 1,03 liegt.

b) Einfluß veränderlicher Stoffeigenschaften[1]: Bei einem Abweichen der örtlichen Temperatur innerhalb der Reibungsschicht von der Temperatur T der Außenströmung liegen entweder ein Wärmeübergang zwischen Wand und Strömungsmittel (Heizen, Kühlen) oder eine durch die Reibungswärme entstandene Aufheizung der Grenzschicht oder auch beides gleichzeitig vor. Die Rückwirkungen dieser Temperaturunterschiede auf die Reibungsschicht sind durch die Abhängigkeit der Stoffeigenschaften (Dichte und Zähigkeit) des Strömungsmittels von der Temperatur verursacht. Es liegt nahe und ist von verschiedenen Forschern vorgeschlagen worden, den Einfluß der unterschiedlichen Temperaturen innerhalb der Reibungsschicht dadurch zu berücksichtigen, daß die als konstant angenommenen Stoffeigenschaften des Strömungsmittels bei einer bestimmten, von der Temperatur der Außenströmung abweichenden Temperatur T_B, die als Bezugstemperatur bezeichnet wird, angenommen werden. Für diese Bezugstemperatur wird die Beziehung

$$T_B = T + a\,(T_r - T) - b\,(T_r - T_W) \tag{5}$$

nahegelegt, wonach diese sich aus der Außentemperatur T, einem infolge Reibungswärme von der Temperaturdifferenz $T_r - T$ und einem infolge Wärmeübergang an der Wand von der Temperaturdifferenz $T_r - T_W$ abhängigen Glied additiv zusammensetzt. Die Reibungstemperatur T_r hängt in bekannter Weise von der *Mach*zahl ab, nämlich

$$T_r - T = r\,T\frac{\varkappa - 1}{2}M^2, \tag{6}$$

Der Erhitzungsfaktor r ist eine Funktion der *Prandtl*zahl.

Wie der Verfasser[1] gezeigt hat, erweisen sich für gasförmige Medien mit von der Temperatur praktisch unabhängiger Prandtlzahl die in Tabelle 1 zusammengestellten Konstanten für die Bezugstemperatur T_B als brauchbar.

Tabelle 1.
Werte der Konstanten in Gleichung (5) und (6).

Reibungsschicht	a	b	r
laminar	0,72	0,48	$Pr^{1/2}$
turbulent	0,50	0,20	$Pr^{1/3}$

Eine Einführung der Bezugstemperatur in den von *E. Truckenbrodt* benutzten Ansatz für die Dissipation des Grenzschichtprofiles ermöglicht die Integration des Energiesatzes der Grenzschicht auch für den Fall veränderlicher Stoffeigenschaften[1]:

$$\frac{\bar{\delta}(x)}{l} = \bar{H}(x)\frac{\vartheta(x)}{l} = \bar{H}_\infty \frac{(c_{f\infty})_{T=T_\infty}}{2} \frac{\Theta(x)^{\frac{1}{1+n}}}{\frac{\varrho(x)}{\varrho_\infty}\left(\frac{U(x)}{U_\infty}\right)^{3+2\bar{H}_T}\frac{R(x)}{l}} \tag{7}$$

mit

$$\Theta(x) = \left[\frac{2}{(c_{f\infty})_{T=T_\infty}}\frac{\vartheta_0}{l}\frac{\bar{H}_0}{\bar{H}_\infty}\frac{\varrho_0}{\varrho_\infty}\left(\frac{U_0}{U_\infty}\right)^{3+2\bar{H}_T}\frac{R_0}{l}\right]^{1+n} + \int_{x_0}^{x}\frac{\varrho(x')}{\varrho_\infty}\frac{T(x')}{T_\infty}\left(\frac{T_\infty}{T_B(x')}\right)^{1-n\omega}\left(\frac{U(x')}{U_\infty}\right)^{3+2n+2\bar{H}_T(1+n)}\left(\frac{R(x')}{l}\right)^{1+n} d\frac{x'}{l}. \tag{8}$$

Hierbei bringt der Formparameter $\bar{H}_T = \bar{\delta}_T/\bar{\delta}$ eine Koppelung zwischen der Strömungs- und Temperaturgrenzschicht. Sein genauer Wert ist jedoch für das Ergebnis (7) von untergeordneter Bedeutung. Es kann daher die Näherungsbeziehung[1]

$$\bar{H}_T(x) = \frac{\varkappa - 1}{2}M^2(x) - \frac{T_W(x) - T_r(x)}{T(x)}, \tag{9}$$

die übrigens für wärmeundurchlässige Wand ($T_W \equiv T_r$) exakt gilt, zur Auswertung von (8) herangezogen werden. Darüber hinaus ist es in vielen Fällen im Rahmen der Näherung ausreichend, für $\bar{H}_T$ einen konstanten Mittelwert längs der Grenzschichtlänge einzusetzen.

[1] Eine ausführliche Darstellung der Überlegungen dieses Abschnittes hat der Verfasser gegeben: *N. Scholz*, ZFW 7 (1959), S. 33.

Für $U = U_\infty$ wird aus (7) der Reibungsbeiwert der Gleichdruckgrenzschicht (ebene Platte) mit veränderlichen Stoffeigenschaften erhalten. Das Verhältnis zum Reibungsbeiwert der Gleichdruckgrenzschicht mit konstanten Stoffeigenschaften ist daher

$$\frac{c_{f\infty}}{(c_{f\infty})_{T=T_\infty}} = \left(\frac{T_\infty}{T_B}\right)^{\frac{1-n\omega}{1+n}}. \tag{10}$$

Abb. 2 gibt das zahlenmäßige Ergebnis dieser Beziehung in Abhängigkeit von der längs der Grenzschicht konstanten Wandtemperatur und der *Mach*zahl der Anströmung als Parameter bei turbulenter Grenzschicht wieder.

c) Einfluß der *Reynolds*zahl und Wandrauhigkeit: Wie *J. Rotta*[1] für die turbulent Grenzschicht gezeigt hat, beschränkt sich dieser Einfluß auf eine dünne wandnahe Schicht, deren Ausbildung im wesentlichen unabhängig vom übrigen Grenzschichtverlauf ist. Man kann daher, wie es auch vom Verfasser[2] bereits durchgeführt worden ist, die zur Integration der Impuls- und Energiegleichung der Grenzschicht erforderlichen Ansätze ebenso für hydraulisch rauhe Wandbeschaffenheit anschreiben, wobei lediglich das örtliche Rauhigkeitsmaß ϑ/k_S anstelle der örtlichen *Reynolds*zahl Re_ϑ bei hydraulisch glatter Wand und selbstverständlich andere Zahlenwerte der Konstanten auftreten. Letztere sind schließlich in (3) bis auf den Exponenten n und den Formparameter H_∞ in dem Reibungsbeiwert der Gleichdruckgrenzschicht $c_{f\infty}$ zusammengefaßt, dessen Abhängigkeit von der *Reynolds*zahl bzw. Wandrauhigkeit wohlbekannt ist.

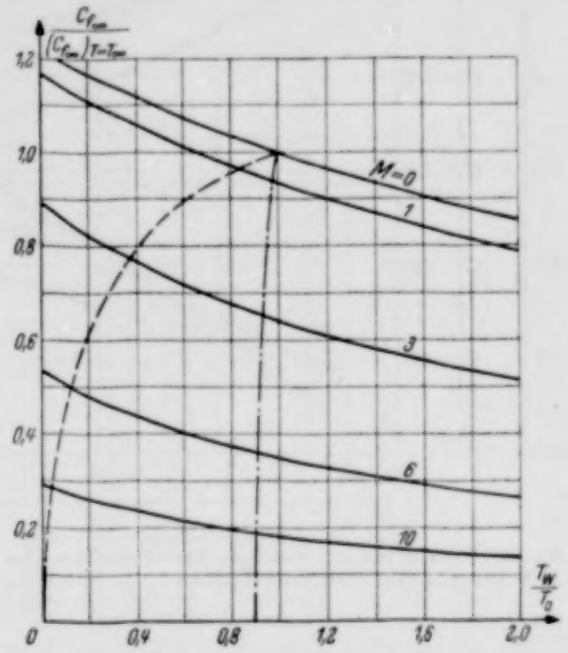


Abb. 2. Verhältnis der Widerstandsbeiwerte der ebenen Plattengrenzschicht mit und ohne Temperatureinfluß nach Gl. (10) in Abhängigkeit von der Wandtemperatur. Strömungsmittel: Luft mit $Pr = 0{,}72$, $\omega = 0{,}76$ und $n = 0{,}19$ (turbulent, $Re_l = 10^7$), —·— $T_W = T_R$ (kein Wärmeübergang), — — — $T_W = T_\infty$ (Kühlung auf Außentemperatur).

Für den Exponenten n läßt sich ein Zusammenhang mit dem Exponenten $\bar{n}$ des Reibungsgesetzes der Gleichdruckgrenzschicht

$$c_{f\infty} = \frac{x}{Re_l^{\bar{n}}} \tag{11}$$

herstellen[3], nämlich

$$\bar{n} = \frac{n}{1+n}. \tag{12}$$

Bekanntlich nimmt $\bar{n}$ mit zunehmender *Reynolds*zahl ab. Es kann aus dem universellen logarithmischen Reibungsgesetz nach *Prandtl-Schlichting*

$$c_{f\infty} = 0{,}455\,(\log Re_l)^{-2{,}58} \tag{13}$$

durch Differentiation zu

$$\bar{n} = \frac{1{,}12}{\log Re_l} \tag{14}$$

gewonnen werden (Abb. 3). Für laminare Grenzschicht ist bekanntlich $\bar{n} = 1/2$.

Der Formparameter H der turbulenten Gleichdruckgrenzschicht ist in Untersuchungen von *J. Rotta*[4] als Funktion des Schubspannungsbeiwertes c_f' bzw. Re_ϑ enthalten. Unter der vereinfachenden Annahme, daß H_∞ längs einer Gleichdruckgrenzschicht im wesentlichen gleich dem Wert am Ende der Grenzschicht ist, kann jedem Wert von Re_ϑ mit Hilfe des Reibungsgesetzes (13) ein Wert von Re_l zugeordnet werden, so daß damit $H_\infty(Re_l)$ gewonnen wird. In Abb. 3 ist diese Beziehung ebenfalls eingezeichnet und mit Messungen von *F. Schultz-Grunow*[5] und *W. Tillmann*[6] verglichen, wobei sich eine recht brauchbare Übereinstimmung ergibt. Im laminaren Fall ist H_∞ wiederum konstant gleich einem Wert von etwa 2,6.

---

[1] *J. Rotta*, Ing.-Arch. 19 (1951), S. 31.
[2] *N. Scholz*, Jahrb. d. Schiffb. Techn. Ges. 45 (1951), S. 244.
[3] Siehe z. B. Fußnote 1 von Seite 82, dort Gleichung (37a).
[4] *J. Rotta*, Mitt. Nr. 8 d. MPI f. Strömungsforschung (1953), S. 1.
[5] *F. Schultz-Grunow*, Luftfahrtforschung 17 (1940), S. 239.
[6] *W. Tillmann*, Untersuchungen über Besonderheiten bei turbulenten Reibungsschichten an Platten, KWI f. Strömungsforschung, UM 6627 (1945).

Die Werte von $\bar{n}$ und H_∞ für die turbulente Grenzschicht bei hydraulisch rauher Wand lassen sich nunmehr durch Zuordnung einer der relativen Wandglätte l/k_S äquivalenten *Reynolds*zahl Re_l bestimmen. Vernachlässigt man den für jede Rauhigkeitsstruktur speziellen Verlauf der Rauhigkeitsfunktion im Übergangsgebiet „rauh—glatt“[1], so setzt sich die Rauhigkeitsfunktion aus den

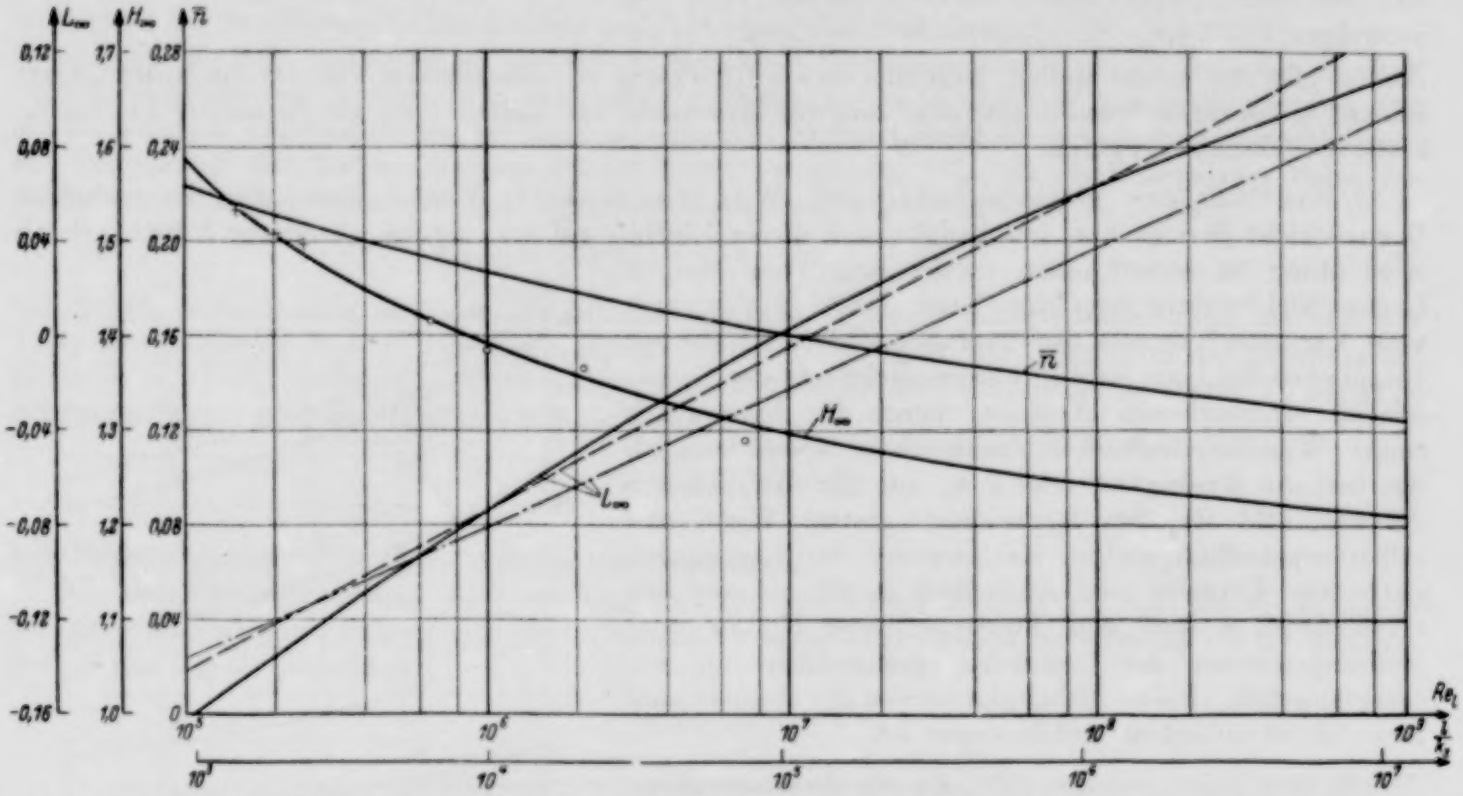


Abb. 3. Kenngrößen der Gleichdruckgrenzschicht n, H_∞ und L_∞ als Funktion der *Reynolds*zahl Re_l bzw. der relativen Glätte l/k_s für H_∞: ⊙ Messung „glatt“ nach *Rotta* (Fußnote 4 von Seite 85), + Messung „rauh“ nach *Rotta* (Fußnote 4 von Seite 85), für L_∞: —— nach Verfasser, — · — nach *E. Truckenbrodt*, — — — nach Tabelle 3.

beiden den „glatten“ und „rauhen“ Bereich wiedergebenden Geraden zusammen, deren Schnittpunkt die Zuordnung der äquivalenten *Reynolds*zahl zu einer relativen Wandglätte bestimmt. Danach befindet man sich mit einer Grenzschicht dann im hydraulisch rauhen Bereich, wenn die zugehörige Wandschubspannung größer als die entsprechende für hydraulisch glatte Wand ist. Auf Grund der Berechnungen des Schubspannungsbeiwertes c_f' als Funktion der örtlichen *Reynolds*zahl Re_ϑ bzw. der örtlichen Wandglätte ϑ/k_S und des Formparameters H von *J. Rotta* läßt sich für die Grenze „rauh—glatt“ die Interpolationsformel

$$\log \frac{U k_S}{\nu} \gtrless 1{,}58 + 0{,}30\, H \begin{cases} < \text{„glatt“} \\ > \text{„rauh“} \end{cases} \tag{15}$$

angeben, die für $H = 1{,}4$ den als Faustformel bekannten Wert $U k_S/\nu = 100$ liefert. Mit zunehmendem H steigt, wie auch anschaulich einleuchtet, die zulässige Rauhigkeit bei gleicher Außengeschwindigkeit U an. Setzt man für die Gleichdruckgrenzschicht in (15) $H = H_\infty$ nach Abb. 3, so ergibt sich die in Abb. 3 als zweite Abszissenskala eingetragene Zuordnung von l/k_S und Re_l, womit auch $\bar{n}$ und H_∞ als Funktion von l/k_S vorliegt.

Mit der Einführung einer äquivalenten *Reynolds*zahl für die hydraulisch rauh wirkende Wand ist auch das Reibungsgesetz der rauhen ebenen Platte festgelegt. Ersetzt man in dem Reibungsgesetz (13) die *Reynolds*zahl mit (15) und $H = H_\infty$ nach Abb. 3 durch die relative Glätte l/k_S, so ergibt sich ein Reibungsgesetz, daß sich durch folgende Gleichung interpolieren läßt:

$$c_{f\infty} = 0{,}418\,[2 + \log (l/k_S)]^{-2{,}53}. \tag{16}$$

Vergleicht man dieses Gesetz mit dem von *L. Prandtl* und *H. Schlichting*[2] (Abb. 4), so findet man besonders bei großen Rauhigkeiten niedrigere c_f-Werte, was mit den Beobachtungen von *W. Tillmann* übereinstimmt. Auf die Ursache dieses Unterschiedes ist bereits von *J. Rotta*[3] hingewiesen worden.

[1] Diese Annahme wird auch von *Rotta* und vom Verfasser gemacht. Über den Begriff der Rauhigkeitsfunktion und deren Verlauf vgl. z. B. *H. Schlichting*, Grenzschichttheorie S. 485ff., 3. Aufl. Karlsruhe 1958.

[2] *H. Schlichting*, a. a. O. Gleichung (21, 33).

[3] Siehe Fußnote 4 von Seite 85.

Aus (16) ergibt sich durch Differentiation und Vergleich mit (11) eine zu (14) analoge Beziehung für den Exponenten $\bar{n}$ bei hydraulisch rauher Wand, nämlich

$$\bar{n} = \frac{1{,}09}{\log\,(2 + l/ks)} \tag{17}$$

Während der Einfluß der *Reynolds*zahl bzw. Wandrauhigkeit auf den Formparameter H_∞ und damit auf die Impulsverlustdicke nach (3) und (4) durchaus zu berücksichtigen ist, kommt der Exponent n hierbei in einer solchen Kombination vor, daß seine Änderung mit der *Reynolds*zahl oder Wandrauhigkeit auf das Ergebnis einen nur untergeordneten Einfluß hat.

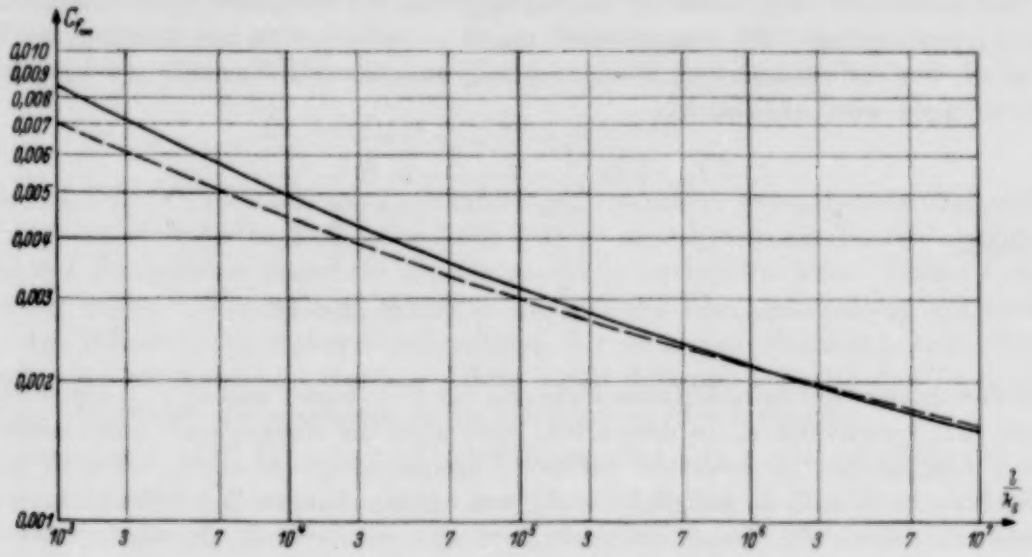


Abb. 4. Reibungswiderstandsbeiwert der hydraulisch rauhen ebenen Platte nach *Prandtl-Schlichting* (———) und nach (Gleichung 16) (— — —).

Tabelle 2 gibt eine Zusammenstellung dieser Werte, wobei bei der turbulenten Reibungsschicht die größeren Werte dem *Blasius*schen Reibungsgesetz ($\bar{n} = 1/5$) und die kleineren dem *Falkner*schen ($\bar{n} = 1/7$) entsprechen.

Tabelle 2. *Werte der Exponenten in Gleichung* (3) und (4).

Reibungsschicht	$\bar{n}$	n	$1+n$	$3+2n$
laminar	0,5	1	2	5
turbulent	0,14—0,20	0,17—0,25	1,17—1,25	3,33—3,50

4. Quadraturformel für den Formparameter. a) Umformung der Quadraturformel. *E. Truckenbrodt* führt für die laminare und turbulente Grenzschicht den neuen Formparameter

$$L = \int \frac{d\bar{H}}{(H-1)\,\bar{H}} \tag{18}$$

ein und gewinnt aus einer Kombination von Impuls- und Energiesatz der Grenzschicht eine geschlossen integrierbare Differentialgleichung für L, deren Lösung schließlich lautet[1]

$$L(x) = \frac{\xi_0}{\xi} L_0 + \ln \frac{U}{U_0} + \frac{1}{\xi} \int_{\xi_0}^{\xi} \left| A \ln Re_\vartheta - B - \ln \frac{U}{U_0} \right| d\xi' . \tag{19}$$

Hierbei sind A und B empirische Konstanten und $\xi = \Theta^C$ mit Θ nach (4) und C einer weiteren empirischen Konstanten[2].

[1] Siehe Fußnote 1 von Seite 84; dort Gleichung (57).

[2] Nach *Truckenbrodt* ist z. B. im turbulenten Fall $A = 0{,}07 \log e$, $B = 0{,}23$ und $C = 4{,}0$. Ferner unterscheidet sich ξ um einen Faktor von der entsprechenden Größe bei *Truckenbrodt*, der sich jedoch in (19) wieder herauskürzt. Hieraus ergeben sich gewisse Vorteile bei der numerischen Rechnung.

Zunächst kann in (19) die in Re_ϑ enthaltene Impulsverlustdicke ϑ durch die Größe Θ nach (3) ersetzt werden. Dann schreibt sich Gleichung (19):

$$L = \frac{\xi_0}{\xi} L_0 + \ln \frac{U}{U_0} + \frac{1}{\xi} \left\{ \int_{\xi_0}^{\xi} (1 + 2A) \ln \frac{U}{U_\infty} d\xi' + A \int_{\xi_0}^{\xi} \ln \left(\frac{R}{l} \frac{H}{H_\infty} \right) d\xi' \right.$$

$$\left. + \frac{A}{1+n} \int_{\xi_0}^{\xi} \ln \Theta \, d\xi' + \left[\ln \frac{U_0}{U_\infty} + A \ln \left(Re_l \frac{c_{f\infty}}{2} \right) - B \right] \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi' \right. . \tag{20}$$

Hierbei ist das dritte und vierte Integral unabhängig von der speziellen Geschwindigkeitsverteilung und kann integriert werden[1]. Bei dem ersten Integral ist es weiterhin zweckmäßig, die Integrationsvariable ξ' in die bei der numerischen Rechnung zugrundeliegende Variable x'/l überzuführen. Mit diesen Umformungen wird schließlich

$$L = L_\infty + \ln \frac{U}{U_\infty} + \frac{A}{1+n} \ln \Theta + \frac{\Lambda}{\xi} . \tag{21}$$

Hierbei bedeutet

$$L_\infty = -B - \frac{A}{C} \frac{1}{1+n} + A \ln \left(Re_l \frac{c_{f\infty}}{2} \right) \tag{22}$$

den Formparameter der Gleichdruckgrenzschicht, da für $U =$ konst und $\vartheta_0 = 0$ alle weiteren Glieder der Gleichung (21) verschwinden. In diesen tritt aber auch die *Reynolds*zahl nicht mehr auf, so daß L_∞ allein den Einfluß der *Reynolds*zahl auf den Formparameter bestimmt. Damit gilt (21) auch für hydraulisch rauhe Wand, da lediglich für L_∞ ein entsprechender Wert einzuführen ist, der sich ohne weiteres aus der zu der Wandrauhigkeit äquivalenten *Reynolds*zahl ergibt. Die Größe Λ ist aus einer Quadratur längs der Wandkontur zu gewinnen:

$$\Lambda = \xi_0 \left(L_0 - L_\infty - \ln \frac{U_0}{U_\infty} - \frac{A}{1+n} \ln \Theta_0 \right)$$

$$- C \int_{x_0}^{x} \left[(1 + 2A) \ln \frac{U}{U_\infty} + A \ln \left(\frac{R}{l} \frac{\overline{H}}{\overline{H}_\infty} \right) \right] \frac{\xi}{\Theta} \left(\frac{d\Theta}{d\frac{x}{l}} \right) d\frac{x'}{l} . \tag{23}$$

Die numerische Auswertung des in (23) auftretenden Integrales gestaltet sich dadurch besonders einfach, daß die Größen Θ und $d\Theta/d(x/l)$ bereits aus der Berechnung der Impulsverlustdicke (4) zahlenmäßig bekannt sind. Darüber hinaus kann im Rahmen der Näherung der zweite Summand im Integranden der Gleichung (23) im ebenen Fall ($R/l \equiv 1$) gegen den ersten vernachlässigt werden, da das Argument des ln nahezu eins und A sehr klein gegen eins ist[2].

Als Konstanten zur Bestimmung von L treten in (21) A, C und statt B der Formparameter L_∞ auf. Nach *Truckenbrodt* ergeben sich A, B und C aus der Linearisierung einer Funktion $K(Re_\vartheta; H)$, durch die eine geschlossene Integration der Differentialgleichung für L erst ermöglicht wird[3]. Eine gewisse Unsicherheit in der Bestimmung dieser Konstanten geht jedoch, wie man aus dem Aufbau der Gleichungen (21) bis (23) und durch Beispielrechnungen feststellen kann, bei den Konstanten A und C praktisch in das Ergebnis nicht ein. Die Konstante B, die in die Größenordnung von L fällt, und damit maßgeblich eingeht, kann durch die Einführung des Formparameters L_∞ der Gleichdruckgrenzschicht unbestimmt bleiben. Wegen des eindeutigen Zusammenhanges $L(H)$ kann L_∞ aus dem Formparameter H_∞ der Gleichdruckgrenzschicht bei glatter und rauher Wand ermittelt werden (Abb. 3).

Gleichung (21) für den Formparameter L gilt gleichermaßen sowohl für laminare wie für turbulente Grenzschicht, wobei lediglich die Konstanten verschieden sind. Die Werte dieser Konstanten sind in Tabelle 3 zusammengestellt.

---

[1] Dieser Schritt wurde von *L. Speidel* in einem unveröffentlichten Bericht des Institutes für Strömungsmechanik der T. H. Braunschweig bereits durchgeführt.

[2] Auch im rotationssymmetrischen Fall kann dieses Glied dadurch vernachlässigbar klein gemacht werden, daß man die Bezugs-*Reynolds*zahl anstatt mit l mit einem mittleren Radius der Körperkontur bildet, wie man anhand von Gleichung (20) erkennt.

[3] Siehe Fußnote 1 von Seite 82, dort Abb. 10 und 11.

Tabelle 3. *Werte der Konstanten in Gleichung* (23).

Reibungsschicht		L_∞	A	C
laminar		0	0	7 [1]
turbulent	glatt	$0{,}0685\, Re_l - 0{,}486$	0,03	4
	rauh	$0{,}0665\,(l/k_S) - 0{,}340$		

b) Einfluß der veränderlichen Stoffeigenschaften. Wird das vorstehende Gleichungssystem formal auf die Grenzschicht mit veränderlichen Stoffeigenschaften übertragen, indem für die Impulsverlustdicke nunmehr Θ nach (7) eingeführt wird, so bleiben die Gleichungen (21) bis (23) unverändert erhalten. Dies bedeutet wiederum, daß der Einfluß der veränderlichen Stoffeigenschaften der Grenzschicht im wesentlichen in einer Änderung des Formparameters L_∞ der Gleichdruckgrenzschicht zum Ausdruck kommt. An Hand von (22) ergäbe sich für diese Änderung

$$L_\infty - (L_\infty)_{T=T_\infty} = A \ln \frac{c_{f\infty}}{(c_{f\infty})_{T=T_\infty}}. \tag{24}$$

Im laminaren Fall ($A = 0$) wäre danach L_∞ unabhängig von einem Temperatureinfluß auf die Grenzschicht, während im turbulenten Fall ($A = 0{,}03$) eine geringe Erhöhung der Ablöseempfindlichkeit bei Erhöhung der Temperatur innerhalb der Grenzschicht vorhanden wäre. Dieses Ergebnis steht zumindestens für wärmeundurchlässige Wand in qualitativer Übereinstimmung mit bisherigen Erkenntnissen. Im Rahmen des Näherungscharakters der gesamten Rechnung kann dieser geringe Einfluß jedoch wohl vernachlässigt werden. Übrig bleibt demnach lediglich der Temperatureinfluß auf die Impulsverlustdicke, die wiederum in die Berechnung von L eingeht.

Der Zusammenhang $L(H; \overline{H})$, wie er durch (18) gegeben ist, wurde mit Hilfe der Definitionsgleichungen für δ^*, ϑ und $\bar{\delta}$ gewonnen, die für konstante Stoffeigenschaften gelten. Der Zusammenhang mit den entsprechenden Größen bei veränderlichen Stoffeigenschaften läßt sich näherungsweise mit Hilfe der Bezugstemperatur T_B angeben. Für die Verdrängungsdicke gilt zunächst streng

$$\delta^* = \int_0^\delta \left(1 - \frac{\varrho(y)\,u(y)}{\varrho(\delta)\,U}\right) dy = \int_0^\delta \left(1 - \frac{u(y)}{U}\right) dy + \int_0^\delta \frac{\varrho(y)\,u(y)}{\varrho(\delta)\,U}\left(\frac{\varrho(\delta)}{\varrho(y)} - 1\right) dy = (\delta^*)_{T=T_\infty} + \bar{\delta}_T. \tag{25}$$

Ferner gilt näherungsweise für die Impulsverlustdicke

$$\vartheta = \int_0^\delta \frac{\varrho(y)\,u(y)}{\varrho(\delta)\,U}\left(1 - \frac{u(y)}{U}\right) dy \approx \frac{T}{T_B}\int_0^\delta \frac{u(y)}{U}\left(1 - \frac{u(y)}{U}\right) dy = \frac{T}{T_B}(\vartheta)_{T=T_\infty} \tag{26}$$

und für die Energieverlustdicke

$$\bar{\delta} = \int_0^\delta \frac{\varrho(y)\,u(y)}{\varrho(\delta)\,U}\left(1 - \frac{u^2(y)}{U^2}\right) dy \approx \frac{T}{T_B}\int_0^\delta \frac{u(y)}{U}\left(1 - \frac{u^2(y)}{U^2}\right) dy = \frac{T}{T_B}(\bar{\delta})_{T=T_\infty}. \tag{27}$$

Daraus folgt

$$\overline{H} \approx (\overline{H})_{T=T\infty} \tag{28}$$

und mit (25)

$$H \approx \frac{T_B}{T}(H)_{T=T_\infty} + \overline{H}_T\,\overline{H}. \tag{29}$$

Mit zunehmender Temperatur in der Grenzschicht wächst also die Verdrängungsdicke der Grenzschicht bei gleicher Impulsverlustdicke stark an, während die Energieverlustdicke unverändert bleibt. Um aus dem Formparameter L bei einer Grenzschicht mit veränderlichen Stoffeigenschaften das Grenzschichtdickenverhältnis H zu gewinnen, hat man somit zunächst über den universellen Zusammenhang $L(H)$ ein äquivalentes $(H)_{T=T_\infty}$ zu ermitteln und damit nach (29) H zu berechnen.

c) Bestimmung der Funktion $H(L)$. In die Beziehung $H(L)$, die durch (18) gegeben ist, geht die Abhängigkeit $\overline{H}(H)$ ein, für die im turbulenten Fall einige Unsicherheit vorliegt [2]. Die von *J. Rotta* angegebenen zweiparametrigen Beziehungen $\overline{H}(H; c_f')$ und $c_f'(H; Re_\vartheta)$ bzw. $c_f'(H; \vartheta/k_S)$ lassen sich auf Funktionen $\overline{H}(H)$ mit dem Parameter Re_ϑ bzw. ϑ/k_S für hydraulisch rauhe Wand umrechnen.

[1] Zur Vereinheitlichung des Rechenganges kann $K(L)$ im laminaren Fall abweichend von *Truckenbrodt* durch eine einzige Gerade ersetzt werden, so daß sich nur ein Wert von C, dafür aber eine Nullpunktsverschiebung für L ergibt, die bei der Beziehung $H(L)$ zu beachten ist.

[2] Siehe Fußnote 1 von Seite 82, dort Abb. 5.

Dabei zeigt sich, daß diese Funktionen im Bereich der praktisch interessierenden Parameterwerte nur so wenig voneinander abweichen, daß sie durch eine mittlere Kurve ersetzbar sind, die in Abb. 5 enthalten ist. Dieser Zusammenhang, der nunmehr sowohl für hydraulisch glatte als auch für rauhe Wand gültig ist, wurde für die Funktion $L(H)$ zugrundegelegt. Die Integration von (18) ergibt dann die ebenfalls in Abb. 5 eingetragene Beziehung $L(H)$, bei der abweichend von *Truckenbrodt* die Integrationskonstante so bestimmt wurde, daß $L = 0$ bei $H = 1{,}3$ zu liegen kommt[1]. Gegenüber *Truckenbrodt* ergibt sich in der Nähe der turbulenten Ablösung eine merkliche Abweichung. Das maximal erreichbare L des Ablösungspunktes liegt entsprechend $H_A = 2{,}4$ bei $L_A = -0{,}264$. In Tabelle 4 sind die Werte der Funktionen $\bar{H}(H)$ und $L(H)$ für laminare und turbulente Grenzschicht zusammengestellt.

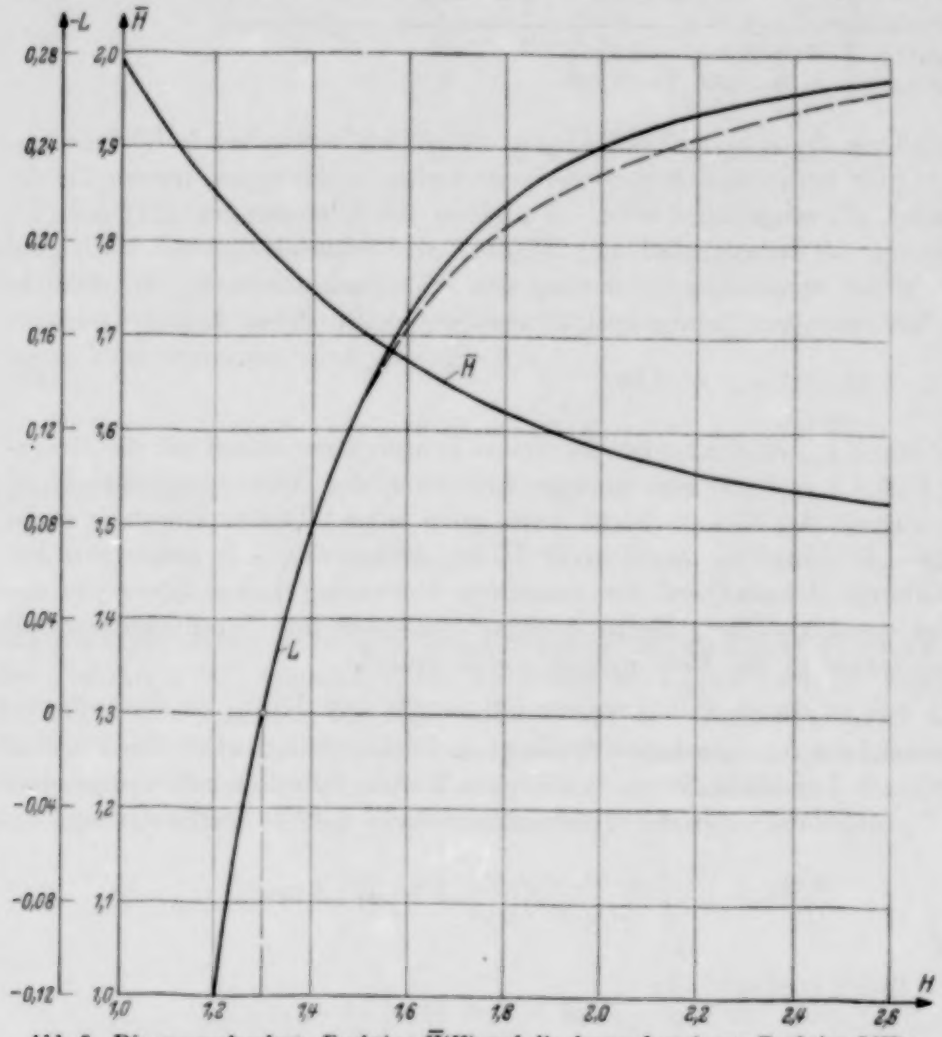


Abb. 5. Die zugrundegelegte Funktion $\bar{H}(H)$ und die daraus berechnete Funktion $L(H)$. (— — — $L(H)$ nach *Truckenbrodt*).

Tabelle 4. *Die Funktionen $\bar{H}(H)$ und $L(H)$ für laminare und turbulente Grenzschicht*

laminar[2]			turbulent		
H	$\bar{H}$	L	H	$\bar{H}$	L
2,2	1,59	0,0347	1,20	1,855	0,127
2,3	1,58	0,0268	1,25	1,825	0,054
2,4	1,57	0,0110	1,30	1,798	0
2,5	1,57	0,0042	1,35	1,774	—0,042
2,6	1,56	—0,0008	1,40	1,751	—0,079
2,8	1,55	—0,0083	1,45	1,729	—0,107
3,0	1,54	—0,0131	1,50	1,709	—0,131
3,2	1,53	—0,0158	1,60	1,674	—0,169
3,4	1,52	—0,0173	1,70	1,645	—0,197
3,6	1,52	—0,0182	1,80	1,622	—0,217
4,038	1,52	—0,0190	1,90	1,602	—0,231
	(Ablösung)		2,00	1,584	—0,242
			2,10	1,569	—0,250
			2,20	1,558	—0,256
			2,30	1,548	—0,260
			2,40	1,540	—0,264
				(Ablösung)	

Damit kann die Größe L_∞ für die turbulente Grenzschicht bei Gleichdruck aus dem in Abb. 3 enthaltenen Grenzschichtdickenverhältnis H_∞ ermittelt werden. Ein Vergleich dieser Werte mit den sich aus (22) ergebenden Werten unter Verwendung der von *Truckenbrodt* angegebenen Konstanten zeigt[3], daß lediglich bei hohen *Reynolds*zahlen die Gleichdruckgrenzschicht nach *Truckenbrodt* etwas kleinere L-Werte liefert. Da der Verlauf von L_∞ über Re_l unmittelbar den Einfluß der *Reynolds*zahl auf die Lage des Ablösungspunktes wiedergibt, wird auch der turbulente Ablösungspunkt nach *Truckenbrodt* bei hohen *Reynolds*zahlen etwas eher erreicht als bei Zugrundelegung der L_∞-Kurve des Verfassers. Weiterhin erkennt man, daß bei sanftem Druckanstieg die *Reynolds*zahl bzw. Wandrauhigkeit einen erheblichen Einfluß auf die Lage des turbulenten Ablösungspunktes haben kann.

[1] Damit entspricht $L = 0$ etwa bei $Re = 10^7$ dem Gleichdruckfall (Abb. 4), während nach *Truckenbrodt* $L = 0$ bei $H = 1{,}4$ lag. Diese Nullpunktsverschiebung ist bei dem Vergleich in Abb. 5 berücksichtigt worden.

[2] Nach *Truckenbrodt* unter Verwendung der Hartree-Profile.

[3] Nach (22) ist hierbei zu setzen: $A = 0{,}07 \log e$, $B = 0{,}23$, $C = 4$, $c_{f\infty}$ nach (14), ferner ist die Versetzung des Nullpunktes für L gegenüber *Truckenbrodt* zu berücksichtigen.

Tabelle 5. *Rechenschema zur Berechnung laminarer und turbulenter Grenzschichten bei hydraulisch glatter und rauher Wand für ebene und rotationssymmetrische Begrenzungen.*

1	lfd. Nr. des Rechenpunktes	ν	23	(7) · (8) · (20) · (21) · (22)	$\bar{d}\Theta/\bar{d}\,\frac{x}{l}$
2	relative Lauflänge	x/l	24	$\Theta_0 + \int_{x_0}^{x_\nu} (23)\, d(x/l)$	Θ
3	relativer Wandradius	R/l	25	$(24)^{1/P}$	
4	relative Außengeschwindigkeit	U/U_∞	26	$(4)^G$	
5	relative Wandtemperatur	T_W/T_∞			
6	$\frac{\varkappa-1}{2} M_\infty^2 \cdot (4)^2$		27	(25)/(3) · (8) · (26)	$(\bar{\delta}/l)/\overline{H}_\infty(c_{f\infty}/2)$
7	$\left(1+\frac{\varkappa-1}{2} M_\infty^2\right)\Big/(1+(6))$	T/T_∞	28	$(24)^m$	
8	$(7)^{1/(\varkappa-1)}$	ϱ/ϱ_∞	29	$d \cdot (23) \cdot (28) \cdot (33)$	$d\Lambda/d\,\frac{x}{l}$
9	r (6)		30	$\Lambda_0 + \int_{x_0}^{x_\nu} (29)\, d(x/l)$	Λ
10	(7) ((9) + 1))	T_r/T_∞	31	(30)/(24) · (28)	
11	(5)—(10)		32	$e \cdot \ln$ (24)	
12	(11)/(7)		33	ln (4)	
13	(6) + (12)	$\overline{H}_T$	34	(31) + (32) + (33)	$L - L_\infty$
14	3 + 2 · (13)	c	35	(34) + L_∞	L
15	$2\frac{\bar{n}}{1-\bar{n}}(1+(13))$		36	aus $\overline{H}(L)$ (Tabelle 4)	$\overline{H}$
16	(14) + (15)	q	37	$\overline{H}_\infty[(c_{f\infty})_{T=T_\infty}/2]$ (27)/(36)	ϑ/l
17	$a \cdot (7) \cdot (9)$		38	aus $H(L)$ (Tabelle 4)	$(H)_{T=T_\infty}$
18	$b \cdot (12)$		39	(19) · (38)/(7)	
19	(7) + (17) + (18)	T_B/T_∞	40	(13) · (36)	
20	$(18)^k$		41	(39) + (40)	H
21	$(3)^p$		42	(37) · (41)	δ^*/l
22	$(4)^q$				

Tabelle 6. *Spezielle Werte im Rechenschema für laminar und turbulente Grenzschichten*

	laminar	turbulent	
		hydraulisch glatt	hydraulisch rau h
r	$Pr^{1/2}$	$Pr^{1/3}$	
a	0,72	0,48	
b	0,50	0,20	
c	$3 + 2\,\overline{H}_T$	$3 + 2\,\overline{H}_T$	
$\bar{n}$	0,5	$1{,}12/\log Re_l$	$1{,}09/\log(2 + l/k)$
k	$\omega - 1$	$\frac{\bar{n}}{1-\bar{n}}\omega - 1$	
p	2	$1 + \frac{\bar{n}}{1-\bar{n}}$	
q	$5 + 4\,\overline{H}_T$	$3 + 2\,\overline{H}_T + 2\,\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}$	
m	6	3	
d	7	4,24	
e	0	0,0025	
L_∞	0	$0{,}0685\,Re_l - 0{,}486$	$0{,}0665\,(l/k_S) - 0{,}340$
$\overline{H}_\infty$	1,56	aus $\overline{H}(L)$ für $L = L_\infty$ (Tabelle 4)	
$(c_{f\infty})_{T=T_\infty}$	$1{,}328\,Re_l^{-0{,}5}$	$0{,}455\,(\log Re_l)^{-2{,}58}$	$0{,}418\,[2 + \log(l/k)]^{-2{,}53}$

Für $L_\infty(Re_l)$ bzw. $L_\infty(l/k_S)$ lassen sich in Anbetracht der sonstigen Vereinfachungen für praktische Rechnungen ausreichende Interpolationsformeln angeben (vgl. Tabelle 3 und Abb. 4).

5. Rechenschema. In Tabelle 5 wurde auf Grund der hier abgeleiteten Gleichungen ein Rechenschema zusammengestellt, das universell für laminare und turbulente Grenzschichten im hydraulisch glatten und rauhen Bereich bei ebenen oder rotationssymmetrischen Begrenzungen anwendbar ist. Bei ebenen Begrenzungen ist hierin überall $R/l \equiv 1$ zu setzen. Strömungsform und Wandbeschaffenheit gehen durch zahlenmäßig verschiedene Konstanten ein, deren Werte aus Tabelle 6 zu entnehmen sind.

Die Zeilen 1 bis 5 enthalten die vorgegebenen Werte der Geometrie der Wandbegrenzung, der Außengeschwindigkeitsverteilung und der Wandtemperaturverteilung. Wegen der erforderlichen Integrationen in Zeile 23 und 30 sind diese Werte zweckmäßig für eine ungerade Anzahl äquidistanter Rechenpunkte x_r/l vorzugeben.

Für eine Grenzschicht mit konstanten Stoffeigenschaften ($T_W \equiv T_r \equiv T$) kommen die Zeilen 6 bis 19 sowie 25 und 39 bis 41 in Fortfall, wodurch sich das Rechenschema wesentlich verkürzt. Bis zur Zeile 34 ist die Rechnung unabhängig von der speziellen *Reynolds*zahl oder Wandbeschaffenheit, wenn man von dem sehr geringen Einfluß auf die Exponenten p und q absieht. Im turbulenten Fall braucht also die Rechnung bei einer Änderung der *Reynolds*zahl oder der Wandbeschaffenheit nur ab Zeile 35 wiederholt zu werden. Die in Zeile 23 bzw. 30 auftretenden Integrationskonstanten Θ_0 bzw. A_0 sind mit den in (8) bzw. (23) vor dem Integralglied stehenden Integrationskonstanten identisch. Man erhält sie im Rechenschema durch Vorgabe der Anfangswerte der Grenzschicht ϑ_0 und L_0 und sinngemäßer Rückrechnung der Zeilen von unten her. Die Integrationen in Zeile 23 bzw. 30 sind bei Verwendung einer Tischrechenmaschine zweckmäßig mit Hilfe der *Simpson*regel in Verbindung mit der 3/8-Regel leicht zu gewinnen.

6. Zusammenfassung. Aufbauend auf dem von *E. Truckenbrodt* angegebenen Quadraturverfahren für laminare und turbulente Grenzschichten werden folgende Ergänzungen mitgeteilt:

1. Durch eine Berücksichtigung des örtlichen Formparameters bei der Quadratur der Impulsverlustdicke wird eine bessere Übereinstimmung mit dem Experiment erzielt.

2. Durch Einführen eines geeigneten Mittelwertes der Temperatur innerhalb der Grenzschicht (Bezugstemperatur) gelingt es, auch die Grenzschicht mit veränderlichen Stoffeigenschaften (Wärmeübergang, Reibungswärme) durch ein einfaches Zusatzglied bei der Berechnung der Impulsverlustdicke zu berücksichtigen. Für die Verdrängungsdicke wird eine Abschätzung angegeben.

3. Der Einfluß der *Reynolds*zahl läßt sich soweit eliminieren, daß er in die erforderlichen Quadraturen nicht eingeht. Durch Einführen einer der Wandrauhigkeit äquivalenten *Reynolds*zahl wird auch der Fall der hydraulisch rauhen Wand eingeschlossen. Für einen vorgegebenen Druckverlauf längs einer Grenzschicht kann der größte Teil der Berechnung der Impulsverlustdicke und des Formparameters unabhängig von der *Reynolds*zahl und der Wandrauhigkeit durchgeführt werden.

4. Durch Elimination des Anteiles der Gleichdruckgrenzschicht im *Truckenbrodt*schen Grenzschichtformparameter kann eine gewisse Unsicherheit in der Berechnung des Formparameters beseitigt und das Ergebnis für die Gleichdruckgrenzschicht im Falle hydraulisch glatter und rauher Wand dem experimentellen Befund besser angepaßt werden. Hierdurch darf auch bei veränderlichem Druckverlauf eine größere Treffsicherheit der Rechenergebnisse erwartet werden.

5. Der Zusammenhang zwischen dem *Truckenbrodt*schen Formparameter L und den Grenzschichtdickenverhältnissen H und $\bar{H}$ wird für die turbulente Grenzschicht unter Verwendung der *Rotta*schen Ergebnisse neu berechnet.

6. Für die numerische Durchführung des Verfahrens wird ein einheitliches Rechenschema angegeben, das folgende Fälle umfaßt:

Grenzschicht laminar oder turbulent,
Wandbegrenzung eben oder rotationssymmetrisch,
Wandbeschaffenheit hydraulisch glatt oder rauh,
Stoffeigenschaften konstant oder temperaturabhängig.

Das rein digitale Berechnungsverfahren kann leicht tabellarisch von Rechenhilfskräften durchgeführt werden und gestattet ebenso wegen seines einheitlichen Aufbaues eine universelle Programmierung für elektronische Rechenanlagen.

(Eingegangen am 16. Mai 1959.)

Anschrift des Verfassers: Privatdozent Dr.-Ing. *N. Scholz*, München-Pasing, Bäckerstr. 57.

On the Transverse Flexure of a Semi-Infinite Plate with an Elliptic Notch

By S. Shioya

1. Introduction. The problems of the stress distribution in a thin plate having notches and subjected to plain bending were first studied by *Lee*[1] who treated the case of two symmetrically disposed hyperbolic notches. *Neuber*[2] also discussed similar problems.

Recently, the author[3] gave the theoretical solution for an infinite strip containing two symmetrically placed semicircular notches under plain bending.

The present paper gives a theoretical solution for a semi-infinite plate notched by an elliptic notch and transmitting a constant bending moment. The analysis is developed on the basis of the *Poisson-Kirchhoff* theory[4] of thin plates and by means of *Muskhelishvilli*'s complex variable method[5]. The method of perturbation is adopted for the determination of parametric coefficients involved in the solution.

Numerical examples are also worked out in some detail, in order to clarify the effects of the notch.

2. Preliminary results. When the middle plane of an isotropic homogeneous thin plate free from lateral load lies originally in the complex plane of $z = x + i\,y$, its deflection w normal to the z-plane is governed by the biharmonic equation, provided the plate is assumed subject to the limitation of the *Poisson-Kirchhoff* theory of thin plates.

As is well known, the solution of the biharmonic equation can be expressed in terms of two analytic functions $\varphi_1(z)$ and $\psi_1(z)$ of the complex variable z:

$$w = Re\,[\bar{z}\,\varphi_1(z) + \chi_1(z)] \qquad \text{with} \qquad \chi_1(z) = \int \psi_1(z)\,dz\,. \tag{1}$$

Overbars are used to indicate conjugate complex quantities.

The bending moments M_x, M_y, twisting moment M_{xy} and shearing forces Q_x, Q_y, all per unit of arc length, are expressible by the formulas

$$\left.\begin{aligned} M_x + M_y &= -2\,D\,(1+\nu)\,[\varphi_1'(z) + \overline{\varphi_1'}(\bar{z})]\,, \\ M_x - M_y + 2\,i\,M_{xy} &= -2\,D\,(1-\nu)\,[\bar{z}\,\varphi_1''(z) + \psi_1'(z)]\,, \\ Q_x - i\,Q_y &= -4\,D\,\varphi_1''(z) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

in which $D = E\,h^3/12\,(1-\nu^2)$ is the flexural rigidity of the plate; E, ν and h being, respectively, *Young*'s modulus, *Poisson*'s ratio and thickness of the plate.

By means of the mapping function

$$z = \omega(\zeta), \qquad \zeta = \varrho\,e^{i\Theta} \tag{3}$$

curvilinear coordinates (ϱ, Θ) are introduced into the z-plane. Substituting equation (3) into equation (1), we now have the deflection of the plate given by

$$w = Re\,[\overline{\omega}(\bar{\zeta})\,\varphi(\zeta) + \chi(\zeta)] \tag{4}$$

where

$$\varphi(\zeta) = \varphi_1[\omega(\zeta)] = \varphi_1(z)\,, \qquad \chi(\zeta) = \int \psi(\zeta)\,\omega'(\zeta)\,d\zeta$$

and

$$\psi(\zeta) = \psi_1[\omega(\zeta)] = \psi_1(z)\,.$$

The bending moments M_ϱ and M_θ, twisting moment $M_{\varrho\theta}$, and shearing forces Q_ϱ and Q_θ, all per unit of arc length with reference to the new coordinates (ϱ, Θ), are expressible by the formulas

$$\left.\begin{aligned} M_\varrho + M_\theta &= -4\,D\,(1+\nu)\,Re\,[\Phi(\zeta)]\,, \\ M_\theta - M_\varrho - 2\,i\,M_{\varrho\theta} &= 2\,D\,(1-\nu)\,\zeta^2\,\frac{\Phi'(\zeta)\,\overline{\omega}(\bar{\zeta}) + \Psi(\zeta)\,\omega'(\zeta)}{\varrho^2\,\overline{\omega}'(\bar{\zeta})}\,, \\ Q_\varrho - i\,Q_\theta &= -4\,D\,\zeta\,\frac{\Phi'(\zeta)}{|\varrho\,\omega'(\zeta)|} \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

---

[1] *G. H. Lee*, J. Appl. Mech. 7 (1940) p. A-53.
[2] *H. Neuber*, Z. angew. Math. Mech. 20 (1940) S. 199.
[3] *O. Tamate* and *S. Shioya*, Trans. Japan Soc. Mech. Engrs. 24 (1958) p. 809 (in Japanese with English summary).
[4] *S. Timoshenko*, Theory of Plates and Shells, New York 1940.
[5] E. g. *G. N. Sawin*, Spannungserhöhung am Rande von Löchern, Übersetzung aus dem Russischen ins Deutsche von *H. Neuber* und *O. Everling*, Berlin 1956.

in which

$$\Phi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}, \qquad \Psi(\zeta) = \frac{\Psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}.$$

For a free boundary of a plate, the boundary equation is written as

$$M_n = 0, \qquad Q_n - \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = 0 \tag{6}$$

where M_n, M_{ns}, and Q_n are, respectively, the bending moment, twisting moment, and shearing force, per unit of arc length of the plate boundary. Here n denotes the outward normal to the boundary and s the arc length. The boundary condition of equation (6) is transformed into[1]

$$-\frac{1}{\varepsilon}\varphi(\zeta) + \frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega}'(\bar{\zeta})}\overline{\varphi}'(\bar{\zeta}) + \overline{\psi}(\zeta) = i\,C_1\,\omega(\zeta) + C_2 \tag{7}$$

where

$$\varepsilon = \frac{1-\nu}{3+\nu}$$

and C_1 is a real constant and C_2 a complex one. When the region occupied by the middle plane of the plate is simply connected, these constants may be taken to be zero.

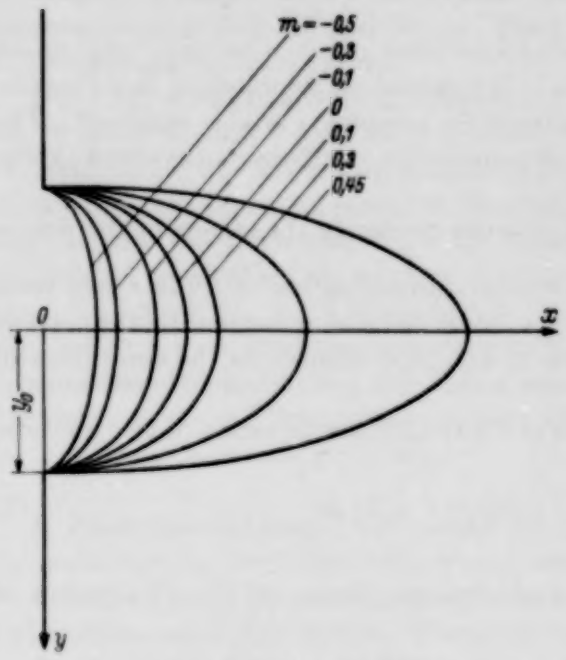


Fig. 1. Shape of elliptic notch.

With these formulas, we shall seek the solution for the case where the semi-infinite plate, having an elliptic notch, is subjected to the plain bending of intensity $M_y = M_0$ at infinity, about x-axis. In this instance, we assume that the straight boundary of the plate and the rim of the notch are both stress free.

3. Method of solution. Let the middle plane of the plate occupy the right half of the z-plane, with the exception of the interior of an elliptic notch whose center is at origin (Fig. 1).

With the aid of the mapping function

$$\omega(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right) \qquad 0 \leqq |m| \leqq 1 \tag{8}$$

and by varying the values of the real constants R and m, the straight boundary of the plate and various shapes of an elliptic notch in the z-plane may be mapped onto the line $\theta = \pm\pi/2$ and $\varrho = 1$ in the ζ-plane, respectively. Denoting the depth and the half width of the notch by x_0 and y_0 respectively, the ratio x_0/y_0 for several values of m are given in Table 1.

Table 1. *Ratio x_0/y_0 for the Values of m.*

m	−0.5	−0.3	−0.1	0	0.1	0.3	0.45
x_0/y_0	0.333	0.538	0.818	1.0	1.222	1.857	2.636

Then, the problem to be solved is reduced to the construction of two function $\varphi(\zeta)$ and $\psi(\zeta)$ which satisfy the following boundary conditions:

$$\text{(i)}\quad \theta = \pm\pi/2, \quad -\frac{1}{\varepsilon}\varphi(\zeta) + \frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega}'(\bar{\zeta})}\overline{\varphi}'(\bar{\zeta}) + \overline{\psi}(\bar{\zeta}) = 0, \tag{9}$$

$$\text{(ii)}\quad \varrho = 1, \qquad -\frac{1}{\varepsilon}\varphi(\zeta) + \frac{\omega(\zeta)}{\overline{\omega}'(\bar{\zeta})}\overline{\varphi}'(\bar{\zeta}) + \overline{\psi}(\bar{\zeta}) = 0. \tag{10}$$

Equations (9) and (10) correspond to the conditions of the straight boundary of the plate and the rim of the notch, respectively, which are both stress free. While, the stress resultants at the infinity part of the plate are $M_y = M_0 =$ constant, with $M_x = M_{xy} = Q_x = Q_y = 0$, which may be easily transformed into

$$\left.\begin{aligned} &\text{(iii)}\quad \varrho \to \infty, \\ &M_\varrho + M_\theta = M_0, \\ &M_\theta - M_\varrho - 2\,i\,M_{\varrho\theta} = M_0 e^{2i\Theta}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Consider the functions

$$\left.\begin{aligned} \varphi(\zeta) &= {}^{\mathrm{I}}\varphi(\zeta) + {}^{\mathrm{II}}\varphi(\zeta), \\ \psi(\zeta) &= {}^{\mathrm{I}}\psi(\zeta) + {}^{\mathrm{II}}\psi(\zeta) \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

where ${}^{\mathrm{I}}\varphi(\zeta)$ and ${}^{\mathrm{I}}\psi(\zeta)$ correspond to the deflection of the semi-infinite plate, without notch, subjected to plain bending and can be written as

$$\left.\begin{aligned} {}^{\mathrm{I}}\varphi(\zeta) &= -\frac{M_0 R}{4 D (1+\nu)}\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right), \\ {}^{\mathrm{I}}\psi(\zeta) &= \frac{M_0 R}{2 D (1-\nu)}\left(\zeta + \frac{m}{\zeta}\right) \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Thus, it is evident that equations (13) satisfy the conditions (iii) at infinity. ${}^{\mathrm{II}}\varphi(\zeta)$ and ${}^{\mathrm{II}}\psi(\zeta)$ are the respective parts of the functions which are analytic in the entire region of the semi-infinite plate surrounding the notch and therefore include only terms of negative powers of ζ. Taking into account the requirement of the symmetry of the problem, we may write ${}^{\mathrm{II}}\varphi(\zeta)$ and ${}^{\mathrm{II}}\psi(\zeta)$ in the form of series:

$$\left.\begin{aligned} {}^{\mathrm{II}}\varphi(\zeta) &= -\frac{M_0 R}{D(1-\nu)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_{2n}}{2n+2}\zeta^{-(2n+2)} + \frac{b_{2n}}{2n+1}\zeta^{-(2n+1)}\right), \\ {}^{\mathrm{II}}\psi(\zeta) &= -\frac{M_0 R}{D(1-\nu)}\left[-\frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_{2n}\zeta^{-(2n+3)} + b_{2n}\zeta^{-(2n+2)}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{c_{2n}}{2n+2}\zeta^{-(2n+2)} + \frac{d_{2n}}{2n+1}\zeta^{-(2n+1)}\right)\right] \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

where a_{2n}, b_{2n}, c_{2n} and d_{2n} are real constants. It is easily shown that these functions leave no stress resultants at infinity. Accordingly, the problem reduces to determine the coefficients a_{2n}, b_{2n}, c_{2n} and d_{2n} so that the straight edge of the plate and the rim of the notch are stress-free, as given by equation (9) and (10) respectively.

Substituting equations (13) and (14) into equation (9) and equating to zero the coefficients of various powers of ϱ, we obtain

$$c_{2n} = \frac{1}{\varepsilon}a_{2n}, \qquad d_{2n} = -\frac{1}{\varepsilon}b_{2n}. \tag{15}$$

In a similar way, equation (10) gives

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}(1+m)(e^{i\theta}+e^{-i\theta}) - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{2n}}{(2n+2)\varepsilon}\left(e^{i(2n+2)\theta} - e^{-i(2n+2)\theta}\right) + \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_{2n}}{(2n+1)\varepsilon}\left(e^{i(2n+1)\theta} + e^{-i(2n+1)\theta}\right) + \\ &\quad + \frac{(1+m)(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}{1-m\,e^{2i\theta}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(a_{2n}e^{i(2n+3)\theta} + b_{2n}e^{i(2n+2)\theta}\right) = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

from which it follows that

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{2}(1-m^2) + \frac{1}{2}(1-m^2)\cos 2\theta + \sum_{n=0}^{\infty}(1+m)\left(1-\frac{1}{(2n+2)\varepsilon}\right)a_{2n}\cos(2n+1)\theta + \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty}(1+m)\left(1+\frac{1}{(2n+2)\varepsilon}\right)a_{2n}\cos(2n+3)\theta + \sum_{n=0}^{\infty}\left[(1+m)+(1-m)\frac{1}{(2n+1)\varepsilon}\right]\times \\ &\quad \times b_{2n}\cos 2n\theta + \sum_{n=0}^{\infty}\left[(1+m)+(1-m)\frac{1}{(2n+1)\varepsilon}\right]b_{2n}\cos(2n+2)\theta = 0, \\ &\frac{1}{2}(1+m)^2\sin 2\theta - \sum_{n=0}^{\infty}\left[(1+m)-(1-m)\frac{1}{(2n+2)\varepsilon}\right]a_{2n}\sin(2n+1)\theta - \\ &\quad - \sum_{n=0}^{\infty}\left[(1+m)-(1-m)\frac{1}{(2n+2)\varepsilon}\right]a_{2n}\sin(2n+3)\theta - \sum_{n=0}^{\infty}(1+m)\left(1+\frac{1}{(2n+1)\varepsilon}\right)\times \\ &\quad \times b_{2n}\sin 2n\theta - \sum_{n=0}^{\infty}(1+m)\left(1-\frac{1}{(2n+1)\varepsilon}\right)b_{2n}\sin(2n+2)\theta = 0. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Moreover, sines and cosines of odd multiples of θ can be expressed in Fourier series of sines or cosines, respectively, of even multiples of θ valid between $\theta = -\pi/2$ and $\theta = \pi/2$

$$\left.\begin{aligned} \cos(2n+1)\theta &= \frac{4}{\pi}\left[\frac{(-1)^n}{2(2n+1)} + \sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+s}(2n+1)}{(2n-2s+1)(2n+2s+1)}\cos 2s\theta\right], \\ \sin(2n+1)\theta &= \frac{4}{\pi}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+s}2s}{(2n-2s+1)(2n+2s+1)}\sin 2s\theta. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Substituting equations (18) into equations (17) and then equating to zero the coefficients of $\cos 2s\theta$ and $\sin 2s\theta$, we get

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(1-m^2)+\left\{(1+m)+(1-m)\frac{1}{\varepsilon}\right\}b_0+\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(1+m)\frac{(-1)^n\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)}{(2n+1)(2n+3)}a_{2n}=0\,,\\
&\frac{1}{2}(1-m^2)\delta_{1,s}+\left\{(1+m)+(1-m)\frac{1}{(2s+1)\varepsilon}\right\}b_{2s}+\left\{(1+m)+(1-m)\frac{1}{(2s-1)\varepsilon}\right\}b_{2s-2}+\\
&\quad+\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}(1+m)\frac{(-1)^{n+s}\left\{(2n+1)(2n+3)\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right)+4s^2\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\right\}}{(2n-2s+1)(2n-2s+3)(2n+2s+1)(2n+2s+3)}a_{2n}=0\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad(s\geqq 1)\,,
\end{aligned}\right\}\tag{19}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(1+m)^2\delta_{1,s}-(1+m)\left(1+\frac{1}{(2s+1)\varepsilon}\right)b_{2s}-(1+m)\left(1-\frac{1}{(2s-1)\varepsilon}\right)b_{2s-2}\;-\\
&\quad-\frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left[(1+m)-(1-m)\frac{1}{(2n+2)\varepsilon}\right]\times\\
&\quad\times\frac{(-1)^{n+s}4s(2n+2)}{(2n-2s+1)(2n-2s+3)(2n+2s+1)(2n+2s+3)}a_{2n}=0\qquad(s\geqq 1)
\end{aligned}\tag{20}$$

where $\delta_{1,s}$ is *Kronecker*'s delta. The set of equations (19) and (20) solves completely the problem of determining the parametric coefficients included in the functions ${}^{II}\varphi(\zeta)$ and ${}^{II}\psi(\zeta)$. Then, if we give the values for m and ε in equations (19) and (20), a formal solution of the set of equations can, for instance, be obtained by means of the method of successive approximation. But, it seems rather convenient to solve these equations by the method of perturbation, in which m and ε are the perturbation parameter. We shall write a formal solution of equations (19) and (20) in the form

$$a_{2n}=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{p=2}^{\infty}{}^{(r)}a_{2n}^{(p)}\,m^r\,\varepsilon^p\,,\qquad b_{2n}=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}{}^{(r)}b_{2n}^{(p)}\,m^r\,\varepsilon^p\tag{21}$$

where ${}^{(r)}a_{2n}^{(p)}$ and ${}^{(r)}b_{2n}^{(p)}$ are independent of m and ε. Substituting these equations into equations (19) and (20), and then equating the coefficients of the same powers of m and ε on both sides, we arrive at the following results:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_{2n}^{0}\,{}^{(0)}a_{2n}^{(p)}=\frac{\pi}{16}\delta_{2,p}+(1-\delta_{2,p})\sum_{k=0}^{\infty}{}^{II}\Psi_{2k}^{0}\,{}^{(0)}a_{2k}^{(p-1)}+(1-\delta_{2,p}-\delta_{3,p})\sum_{k=0}^{\infty}{}^{II}\Psi_{2k}^{0}\,{}^{(0)}a_{2k}^{(p-2)}\\
&\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_{2n}^{2s}\,{}^{(0)}a_{2n}^{(p)}=\frac{\pi}{16}\delta_{1,s}\delta_{2,p}-(1-\delta_{2,p})\sum_{k=0}^{\infty}2\,{}^{II}\Psi_{2k}^{2s}\,{}^{(0)}a_{2k}^{(p-1)}+(1-\delta_{2,p}-\delta_{3,p})\times\\
&\qquad\times\sum_{k=0}^{\infty}(2k-2s+3)\,{}^{II}\Psi_{2k}^{2s}\,{}^{(0)}a_{2k}^{(p-2)}\qquad(s\geqq 1)\,,
\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_{2n}^{0}\,{}^{(r)}a_{2n}^{(p)}=\frac{\pi}{8}\left(\delta_{1,r}+\frac{1}{2}\delta_{2,r}\right)\delta_{2,p}+\frac{\pi}{8}(1-\delta_{2,p})\times\\
&\quad\times\left[{}^{(r-1)}b_0^{(p)}-{}^{(r-1)}b_0^{(p-1)}-\frac{1}{3}\left({}^{(r-1)}b_2^{(p)}+{}^{(r-1)}b_2^{(p-1)}\right)\right]+(1-\delta_{2,p})\times\\
&\times\left[\sum_{k=0}^{\infty}{}^{II}\Psi_{2k}^{0}\,{}^{(r)}a_{2k}^{(p-1)}-\sum_{k=0}^{\infty}{}^{III}\Psi_{2k}^{0}\,{}^{(r-1)}a_{2k}^{(p)}+\sum_{k=0}^{\infty}{}^{IIII}\Psi_{2k}^{0}\,{}^{(r-1)}a_{2k}^{(p-1)}\right]+(1-\delta_{2,p}-\delta_{3,p})\times\\
&\quad\times\left[\sum_{k=0}^{\infty}{}^{II}\Psi_{2k}^{0}\,{}^{(r)}a_{2k}^{(p-2)}+\sum_{k=0}^{\infty}{}^{II}\Psi_{2k}^{0}\,{}^{(r-1)}a_{2k}^{(p-2)}\right],\\
&\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_{2n}^{2s}\,{}^{(r)}a_{2n}^{(p)}=\frac{3}{16}\pi\left[(\delta_{(r-1),s}+\delta_{r,s})+\frac{1}{3}(\delta_{(r-2),s}+\delta_{(r+1),s})\right]\delta_{2,p}+\frac{\pi}{8}(1-\delta_{2,p})\times\\
&\quad\times\left[\frac{1}{2s-1}{}^{(r-1)}b_{2s-2}^{(p)}-{}^{(r-1)}b_{2s-2}^{(p)}-\frac{4s}{2s+1}{}^{(r-1)}b_{2s}^{(p-1)}-\frac{2s+1}{2s+3}\times\right.\\
&\quad\left.\times\left(\frac{1}{2s+1}{}^{(r-1)}b_{2s+2}^{(p)}+{}^{(r-1)}b_{2s+2}^{(p-1)}\right)\right]-(1-\delta_{2,p})\times\\
&\times\left[\sum_{k=0}^{\infty}2\,{}^{II}\Psi_{2k}^{2s}\,{}^{(r)}a_{2k}^{(p-1)}+\sum_{k=0}^{\infty}{}^{III}\Psi_{2k}^{2s}\,{}^{(r-1)}a_{2k}^{(p)}+\sum_{k=0}^{\infty}{}^{IIII}\Psi_{2k}^{2s}\,{}^{(r-1)}a_{2k}^{(p-1)}\right]+(1-\delta_{2,p}-\delta_{3,p})\times\\
&\times\left[\sum_{k=0}^{\infty}(2k-2s+3)\,{}^{II}\Psi_{2k}^{2s}\,{}^{(r)}a_{2k}^{(p-2)}+\sum_{k=0}^{\infty}(2k-2s+3)\,{}^{II}\Psi_{2k}^{2s}\,{}^{(r-1)}a_{2k}^{(p-2)}\right]\quad(s\geqq 1)\,.
\end{aligned}\right\}\tag{23}$$

$(r\geqq 1)$

$$
{}^{(0)}b_{2s}^{(p)} = -\frac{1}{2}\delta_{0,s}\delta_{1,p} + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\delta_{0,s} + \delta_{1,s}\right)\delta_{2,p} + (1-\delta_{1,p}-\delta_{2,p})\frac{4}{\pi}(2s+1)
$$
$$
\times\left[\sum_{n=0}^{\infty} \Phi_{2n}^{2s\,(0)} a_{2n}^{(p)} + \sum_{n=0}^{\infty}(2n+2s+7)\,{}^{\mathrm{II}}\Psi_{2n}^{2s+2\,(0)} a_{2n}^{(p-1)}\right], \tag{24}
$$

$$
{}^{(r)}b_{2s}^{(p)} = -\frac{1}{2}\delta_{0,s}\delta_{1,r}\delta_{1,p} + \left\{\frac{1}{2}\delta_{0,s}\delta_{1,r} + \frac{3}{4}(2s+1)\right.
$$
$$
\times\left[\frac{1}{3}\left(\delta_{(r-2),s} + \delta_{(r+1),s}\right) + \delta_{(r-1),s}(1-\delta_{0,s}) + \delta_{r,s}\right]\Big\}\delta_{2,p}
$$
$$
+ (1-\delta_{1,p}-\delta_{2,p})\left\{\frac{2s+1}{2s+3}\,{}^{(r-1)}b_{2s+2}^{(p)} + \frac{4}{\pi}(2s+1)\left[\sum_{n=0}^{\infty}\Phi_{2n}^{2s\,(r)}a_{2n}^{(p)}\right.\right.
$$
$$
- \sum_{n=0}^{\infty}\Phi_{2n}^{2s+2\,(r-1)}a_{2n}^{(p)} + \sum_{n=0}^{\infty}(2n+2s+7)\,{}^{\mathrm{II}}\Psi_{2n}^{2s+2\,(r)}a_{2n}^{(p-1)}
$$
$$
\left.\left. + \sum_{n=0}^{\infty}(2n+2s+7)\,{}^{\mathrm{II}}\Psi_{2n}^{2s+2\,(r-1)}a_{2n}^{(p-1)}\right]\right\} \qquad (r \geqq 1) \tag{25}
$$

where

$$
\left.\begin{aligned}
\Phi_{2n}^{2s} &= \frac{(-1)^{n+s+1}}{(2n-2s+1)(2n+2s+3)}, \\
{}^{\mathrm{II}}\Psi_{2n}^{0} &= \frac{(-1)^{n+1}}{2(2n+3)(2n+5)}, \\
{}^{\mathrm{II}}\Psi_{2n}^{2s} &= \frac{(-1)^{n+s+1}}{(2n+2s+1)(2n+2s+3)(2n+2s+5)} \qquad (s \geqq 1), \\
{}^{\mathrm{III}}\Psi_{2n}^{2s} &= \frac{(-1)^{n+s+1}[4n^2+8n-(2s+1)^2]}{(2n-2s-1)(2n-2s+3)(2n+2s+1)(2n+2s+5)}, \\
{}^{\mathrm{III}}\Psi_{2n}^{0} &= \frac{(-1)^{n+1}(2n-3)}{2(2n-1)(2n+1)(2n+5)}, \\
{}^{\mathrm{III}}\Psi_{2n}^{0} &= \frac{(-1)^{n+s+1}\,2\,[4n^2+8n+3(2s+1)^2]}{(2n-2s-1)(2n-2s+1)(2n-2s+3)(2n+2s+3)(2n+2s+5)}, \quad (s \geqq 1).
\end{aligned}\right\} \tag{26}
$$

With these relations, the coefficients ${}^{(r)}a_{2n}^{(p)}$ and ${}^{(r)}b_{2n}^{(p)}$ in the Series (21) can be determined successively for $r = 0, 1, 2, \ldots$, and $p = 1, 2, 3, \ldots$, respectively. In particular, the coefficients ${}^{(0)}a_{2n}^{(p)}$ and ${}^{(0)}b_{2n}^{(p)}$, corresponding to the solution for the semi-infinite plate[1] notched by a single semicircular notch, were already obtained by the author. It may be noted that in the infinite sets of equations (22) and (23) the coefficients of ${}^{(r)}a_{2n}^{(p)}$ are invariant for all values of r and p. Hence, if we solve these equations once, the solutions in successive cycles are obtained only by the calculations about the constant terms.

For brevity, no proof of convergence is pursued here, but it will be illustrated by the numerical examples which follow.

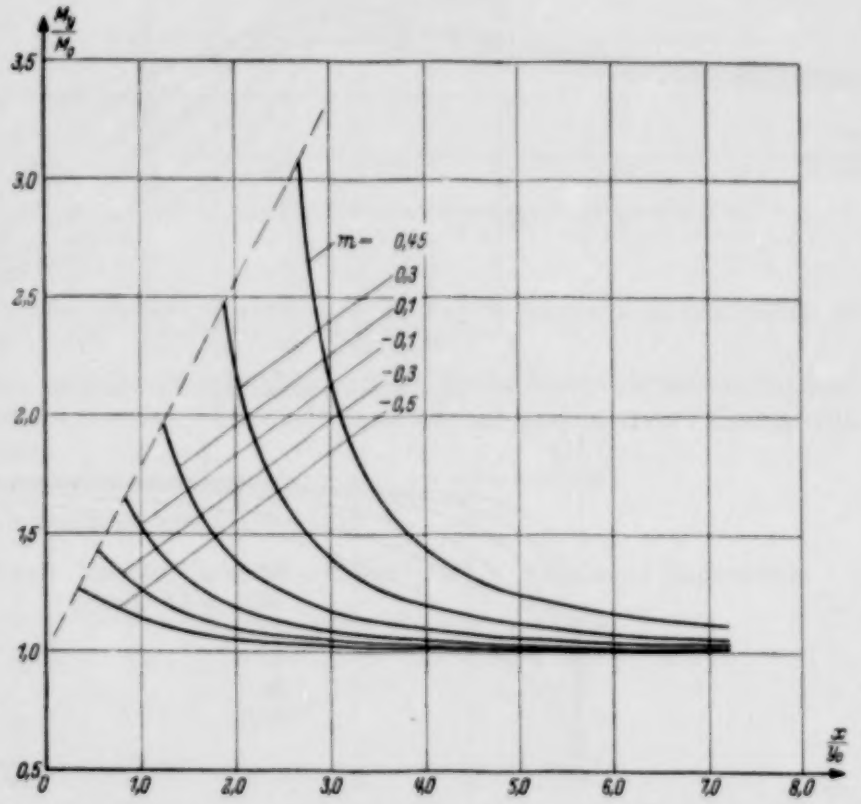


Fig. 2. Stress resultant M_y on the minimum section ($\nu = 0.3$).

4. Numerical Examples. The foregoing solution is worked out in some detail. The calculations of ${}^{(r)}a_{2n}^{(p)}$ and ${}^{(r)}b_{2n}^{(p)}$ are carried out until $r = 7$ and $p = 5$, but their values are not shown here for brevity. By using these values, it is now rather straightforward to calculate the stress resultants in the neigh-

[1] *O. Tamate* and *S. Shioya*, l. c.

bourhood of the notch. On working out the values of M_ϱ and $(Q_\varrho - \partial M_{\varrho\vartheta}/\partial s)$ which are to be zero on the rim of the notch, where s denotes the arc length of the notch, the greatest value found is less than $0.04\, M_0$ for $m = 0.45$ and $\nu = 0.3$ (M_ϱ for $\vartheta = 0$). Therefore, the values of parametric coeffi-

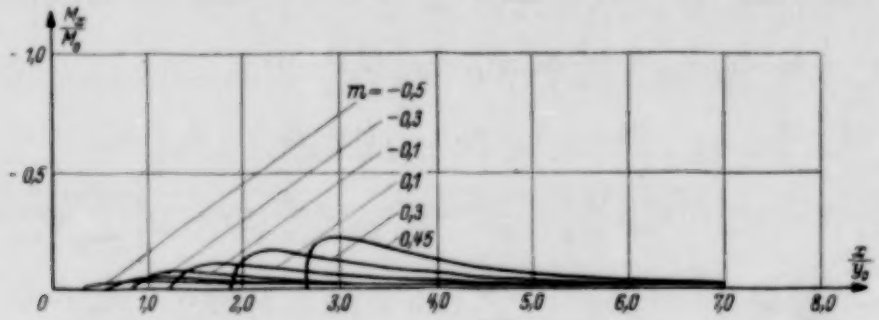


Fig. 3. Stress resultant M_x on the minimum section ($\nu = 0.3$).

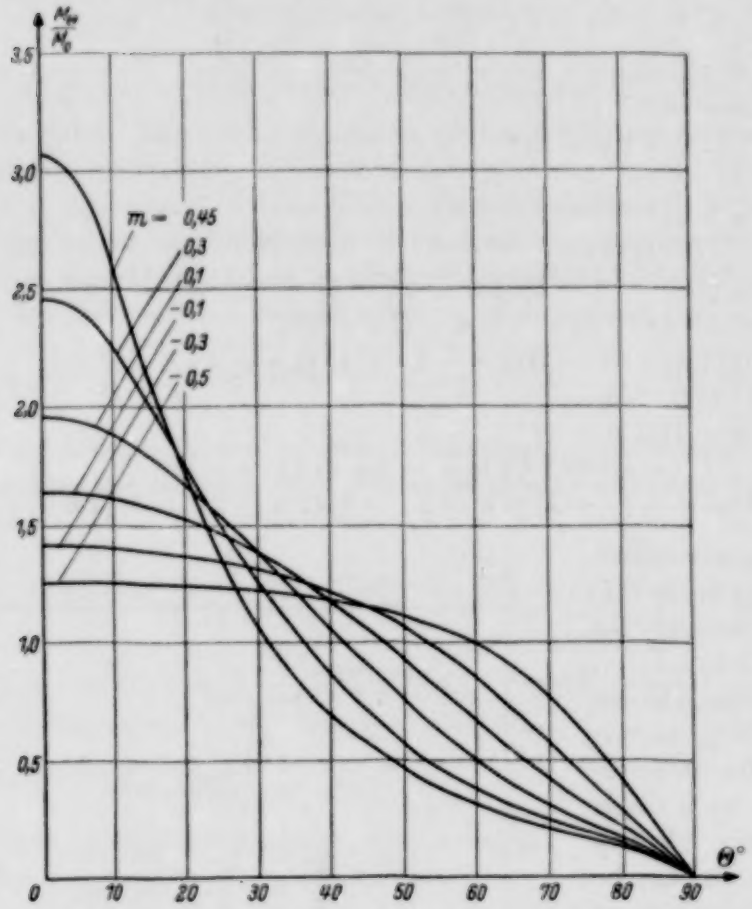


Fig. 4. Stress resultant M_Θ at the rim of the notch ($\nu = 0.3$).

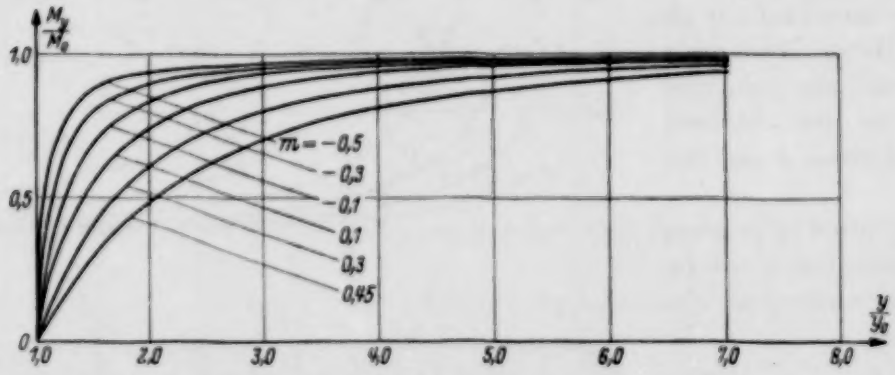


Fig. 5. Stress resultant M_y on the straight edge ($\nu = 0.3$).

cients obtained are thought to be sufficient to get the stress resultants with satisfactory approximation. When m is smaller, the approximation is more satisfactory.

The values of the stress resultants M_y and M_x along the axis of symmetry, $0\,x$, are shown for some values of m in Figs. 2 and 3. It is seen that the maximum values of M_y/M_0 occur at the apex

of the notch and they vary almost linearly with the ratio x_0/y_0 as shown by dotted line in Fig. 2. Fig. 4 shows the values of the stress resultants M_θ/M_0 round the notch for several values of m. The stress resultants at the straight edge are shown in Fig. 5.

In order to study the effects of the notch, we shall consider the stress concentration factor k_b, i. e. the ratio of the maximum bending moment at the apex of the notch to M_0. Since $M_\varrho = 0$ on the rim of the notch the maximum bending moment is given by

$$\frac{M_{max}}{M_0} = k_b = 1 - \frac{2(1-\varepsilon)}{1-m} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} {}^{(r)}M^{(p)}\, \varepsilon^{p-1}\, m^r \tag{27}$$

where

$${}^{(r)}M^{(p)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left({}^{(r)}a_{2n}^{(p)} + {}^{(r)}b_{2n}^{(p)} \right). \tag{28}$$

With this equation, the stress concentration factor k_b are calculated and plotted versus ε in Fig. 6. For the limiting case of $m = 0$, the results agree with those for a semicircular notch.

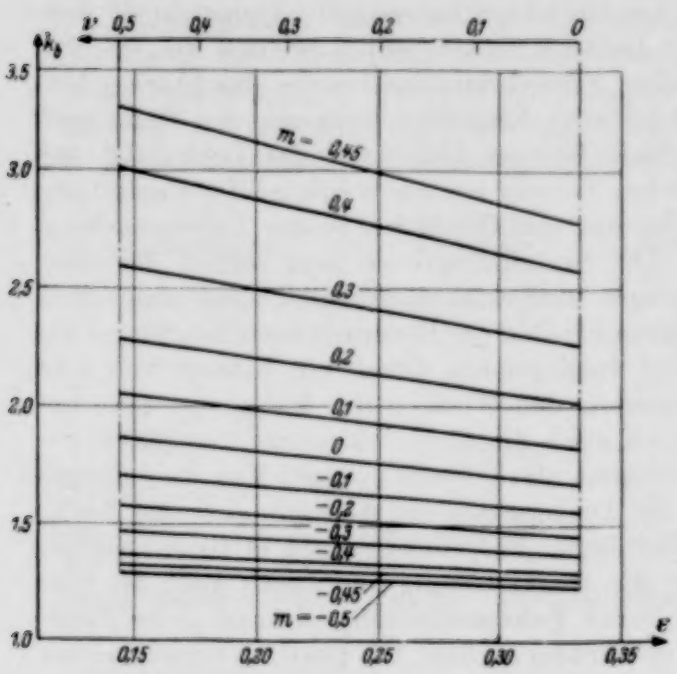


Fig. 6. Stress concentration factor k_b versus ε.

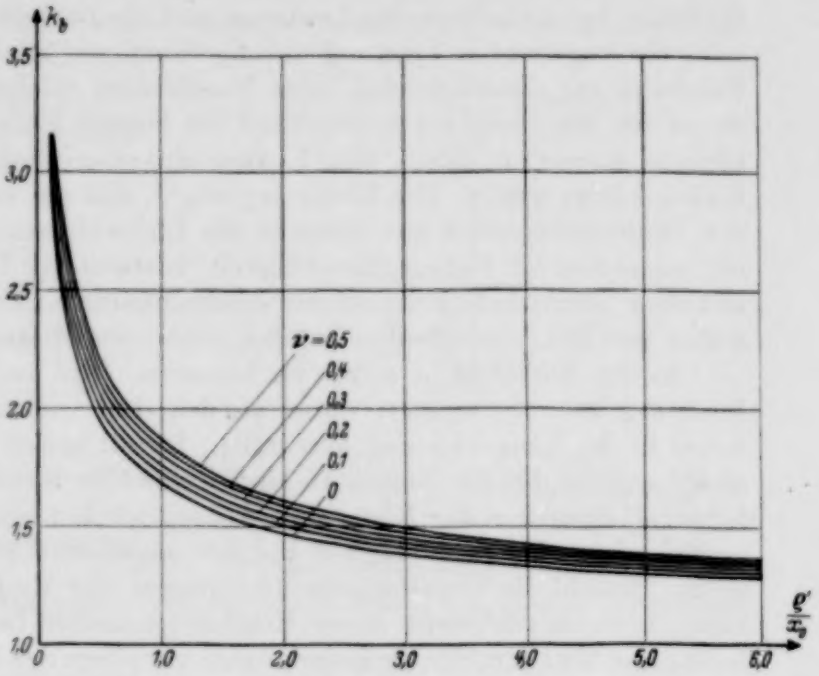


Fig. 7. Stress concentration factor k_b versus ϱ'/x_0.

The stress concentration factor are also plotted against ϱ'/x_0 in Fig. 7, where ϱ' is the radius of curvature of the notch at its apex.

In conclusion, the author wishes to express his hearty thanks to Professor Emeritus *Seiichi Higuchi* and Professor *Osamu Tamate* of Tohoku University for their kind advices and interests throughout the progress of the present investigation.

(Eingegangen am 25. Mai 1959.)

Anschrift des Verfassers: *Shunsuke Shioya*, Tohoku University, Department of Mechanical Engineering, Sendai (Japan).

Der Einfluß der Kraftwagenfederung auf die Lenkstabilität

Von G. Mitterlehner

1. Einleitung. Diese Untersuchung ist die Fortsetzung meiner früheren Arbeit „Die Lenkstabilität des luftbereiften Kraftwagens gegenüber kleinen Störungen".[1] Im folgenden wird vorausgesetzt, daß der Leser mit dem Inhalt der erwähnten Arbeit und den dort verwendeten Bezeichnungen vertraut ist; doch soll das darin behandelte Problem nochmals kurz erläutert werden.

Ein Vorderrad eines Kraftwagens überfährt eine kleine Unebenheit der Fahrbahn, wodurch die beiden durch die Spurstange miteinander verbundenen Vorderräder etwas um ihre Lenkzapfen verschwenkt werden. Auf diese Weise wird ein lineares System von drei Freiheitsgraden — seitliches Schieben und Gieren um die Hochachse des ganzen Fahrzeugs sowie Lenkausschlag der Vorderräder — gestört, das auf diese Störung ähnlich wie ein Kraftwagen reagiert. Zunächst wurde die Stabilität bei festgehaltener Lenkung und elastischem Lenkgestänge untersucht. Dann wurde dasselbe für losgelassene Lenkung durchgeführt, die allein dadurch rückgestellt wird, daß die von der Fahrbahn auf die eingeschlagenen Vorderräder wirkenden Seitenkräfte infolge des Nachlaufes Momente um die Lenkzapfen erhalten.[2] In beiden Fällen ist zum Einhalten einer geraden Bahn eine kleinere Korrektur durch den Lenker unvermeidlich, was bei der Definition der Lenkstabilität[3] berücksichtigt wurde. Die Rechnung zeigt[4], daß ein solches System vor allem infolge der Entlastung der Vorderräder durch das Moment des Luftwiderstandes um eine Querachse in der Fahrbahnebene mit zunehmender Fahrgeschwindigkeit unstabil wird. Die Stabilitätsgrenze liegt jedoch bei einer zu hohen Geschwindigkeit und ein vergleichbarer Kraftwagen wird erfahrungsgemäß schon wesentlich früher unstabil, was offenbar auf den dabei vernachlässigten Einfluß der Federung zurückzuführen ist.

Um der Wirklichkeit näher zu kommen, wird in der vorliegenden Arbeit ein System von vier Freiheitsgraden verwendet, wobei zu den drei vorerwähnten das Wanken des Fahrzeugs um eine Achse in der Längsrichtung hinzutritt. Damit lassen sich auch die Kreiselmomente der Räder berücksichtigen, die die Stabilität eines schnellen Kraftwagens stark beeinflussen. Von den „ungefederten" Bauteilen der Räder und Achsen werden nur die Drehmassen um Achsschenkel und Lenkzapfen, nicht aber ihre Trägheit bei den annähernd geradlinigen Federbewegungen in Rechnung gestellt. Obwohl die Translationsschwingungen der Räder die Bodenhaftung und damit auch die Stabilität beeinflussen[5], tritt dieser Einfluß besonders bei hoher Fahrgeschwindigkeit und guter Fahrbahn gegenüber dem der Kreiselmomente vor allem der Vorderräder zurück. Die aus dem Verschwinden der Systemdeterminante folgende charakteristische Gleichung wird mit Hilfe eines neueren in der Regelungstechnik gebräuchlichen Stabilitätskriteriums ausgewertet, das in diesem Fall recht rasch zum Ziel führt. Die Stabilitätsgrenze liegt bei diesem System in der Nähe der Höchstgeschwindigkeit des vergleichbaren Fahrzeugs. Der Zustand von drei verschiedenen Kraftwagen wird bei der jeweils angegebenen Höchstgeschwindigkeit untersucht. Dabei ergibt sich Stabilität gegenüber kleinen, von der Fahrbahn ausgehenden Störungen nur als Folge sorgfältiger Abstimmung des Lenksystems und der Federung. Bei ausgeführten Kraftwagen liegen die Verhältnisse infolge der progressiven Nichtlinearität vieler Federungen etwas günstiger, da diese zur Stabilisierung eines im kleinen unstabilen Systems führen kann. Dem wirkt jedoch der Einfluß der in Wirklichkeit degressiv nichtlinearen Reifenkennlinie[6] entgegen. Schließlich wird noch der Einfluß der sog. Vorspur behandelt.

2. Die Lage der Momentanachse des Wankens. Die Federung beeinflußt die Stabilität hauptsächlich dadurch, daß sie ein Wanken des Aufbaus um eine Achse in der Längsrichtung ermöglicht. Eine solche Bewegung wird häufig als Rollen des Aufbaus bezeichnet, was aber hier zu Verwechslungen mit dem Rollen der Räder führen könnte.

Die Lage der Wankachse für verschiedene Radaufhängungen hat zuerst *S. de Lavaud*[7] ermittelt. Bei gleicher Lagerung der Vorder- und Hinterräder zeigt sich in der Vorderansicht der Spurpunkt

[1] *G. Mitterlehner*, Ing.-Arch. 27 (1959) S. 88.
[2] S. Fußnote 1, dort Abb. 1 und 6.
[3] S. Fußnote 1, dort Abschnitt 8.
[4] S. Fußnote 1, dort Abb. 8.
[5] *H. Kurz*, Automobiltechn. Z. 60 (1958) S. 124.
[6] S. Fußnote 1, dort Abb. 2.
[7] *Sensaud de Lavaud*, Le probleme de l'independance des roues d'arriere d'une voiture automobile, Paris 1929 (im Selbstverlag des Verfassers).

der Momentanachse des Wankens mit der Bildebene als Momentanpol M (Abb. 1). Für kleine Seitenneigung des Aufbaus aus seiner statischen Gleichgewichtslage und bei Vernachlässigung der verschiedenen Eindrückung der Luftreifen findet man M als Schnittpunkt der Verbindungslinie des Stützpunktes A mit dem Momentanpol M eines Rades und der Mittelebene des Aufbaus. *H. Maruhn*[1] hat auf die gleiche Weise den Momentanpol für zahlreiche Arten der Radaufhängung aufgesucht. Für kleine Seitenneigung des Aufbaus ist das Rückstellmoment der Federung dem Neigungswinkel annähernd proportional. *R. Eberan v. Eberhorst*[2] gibt die zugehörigen Konstanten für verschiedene Radaufhängungen an. Mit der so berechneten Seitenneigung und den daraus entstenden Änderungen der Raddrücke und der Schräglaufwinkel der Räder hat derselbe Verfasser die Stabilität des Kraftwagens beim Durchfahren einer Kurve behandelt. Für größere Seitenneigung des Aufbaus kann der Momentanpol nicht mehr auf die oben beschriebene einfache Weise gefunden werden. Die dann unter Umständen recht komplizierte Berechnung der Seitenneigung zu gegebener Fliehkraft und Härte der Federung wurde von *E. Marquard*[3] für verschiedene Radaufhängungen durchgeführt.

Wie vorher für das Schieben und das Gieren des Fahrzeugs, sowie für die Lenkschwingung werden auch für die Seitenneigung des Aufbaus kleine Amplituden vorausgesetzt. Damit kann der Momentanpol des Wankens wie in Abb. 1 bestimmt und das Rückstellmoment der Federung der Seitenneigung proportional gesetzt werden. Der bei Personenkraftwagen vorherrschende Fall verschiedener Radaufhängung für Vorder- und Hinterräder führt auf eine Wankachse, die nicht parallel zur Längsrichtung des Fahrzeugs ist, sondern von vorne nach hinten ansteigt. Er wird in einem Berechnungsbeispiel behandelt.

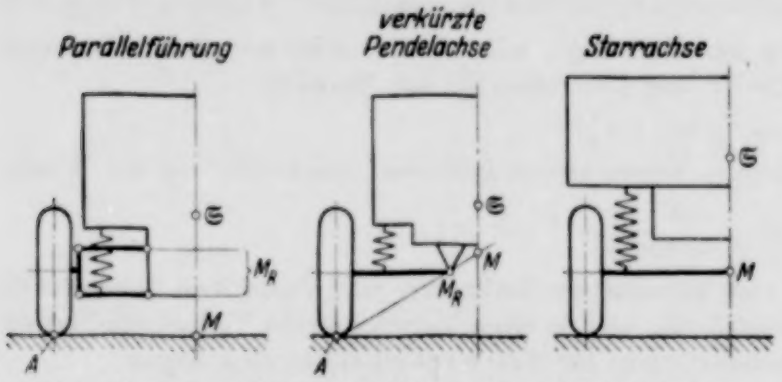


Abb. 1. Momentanpol des Wankens bei verschiedenen Radaufhängungen.

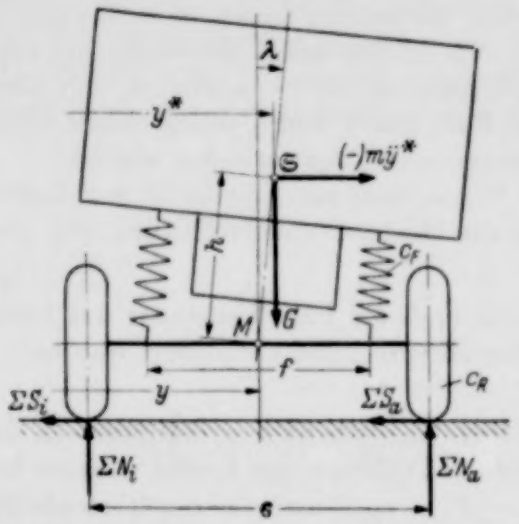


Abb. 2. Kräfte am Fahrzeug beim Durchfahren einer Kurve.

3. Verwendete Bezeichnungen. An dieser Stelle werden nur jene Bezeichnungen erklärt, die in de vorliegenden Arbeit erstmals vorkommen. Bezüglich der anderen sei auf Abschnitt **5** der ersten Arbeit verwiesen. Ein Großteil der erstmals auftretenden Größen ist aus Abb. 2 zu ersehen. Es bedeuten:

B den Rückstellbeiwert des Wankens,
c_F die Federkonstante der Hauptfeder für ein Rad,
c_R die Federkonstante eines Luftreifens,
c_λ die resultierende Federkonstante von Hauptfeder und Luftreifen,
d den Dämpfungsbeiwert des Wankens,
f die Federweite,
F die Federkraft der Hintereinanderschaltung von Hauptfeder und Luftreifen,
h den Hebelarm der Fliehkraft um die Wankachse,
k_d den Dämpfungsbeiwert eines Stoßdämpfers,
I_x die Drehmasse des Aufbaus um seine Längs-Schwerachse,
I_ω die Drehmasse eines Rades um seine Achse,
y die Koordinate der Seitenschiebung des Momentanpols vom ortsfesten System,
y^* die Koordinate der Seitenschiebung des Schwerpunkts vom ortsfesten System,
λ den Winkel der Seitenneigung des Aufbaus,
λ_R den Kippwinkel eines Rades,
$\mu \quad = I_z \Big/ \frac{m\,l^2}{4}$ den Faktor der Massenverteilung um die Hochachse.

Die Indices i, bzw. a bedeuten „auf der kurveninneren", bzw. „auf der kurvenäußeren" Seite des Fahrzeugs.

[1] *H. Maruhn*, Die Grundlagen der Federung von Automobilen, Berlin 1932.
[2] *R. Eberan v. Eberhorst*, Automobiltechn. Z. 55 (1953) S. 246.
[3] *E. Marquard*, Automobiltechn. Z. 51 (1949) S. 31 u. 52 (1950) S. 34.

4. Das Wanken des Aufbaus. Da das Wanken im allgemeinen nicht um die Längsschwerachse des Aufbaus mit dem Spurpunkt $\mathfrak{S}$ in der Bildebene von Abb. 2, sondern um die Momentanachse mit dem Spurpunkt M erfolgt, vergrößert es die Seitenschiebung des Schwerpunkts. Während beim ungefederten Fahrzeug die Seitenschiebung für jeden Punkt der Hochachse des Aufbaus dieselbe war, ergibt sich jetzt für $\lambda \ll 1$ die Seitenschiebung des Schwerpunktes aus der des „Momentanpols" und der Seitenneigung des Aufbaus zu

$$y^* = y + h\lambda\,. \tag{1}$$

Im bisher behandelten System[1] waren y^* und y identisch. Es erweist sich als praktisch, die Koordinate y beizubehalten, die aber jetzt nicht mehr Schwerpunktskoordinate ist. Dann muß im Trägheitsglied für die Seitenschiebung $\ddot{y}$ durch $\ddot{y}^* = \ddot{y} + h\ddot{\lambda}$ ersetzt werden, wodurch bereits eine Kopplung zwischen Schieben und Wanken auftritt.

Da der Momentanpol des Wankens M gegenüber dem ortsfesten System die Beschleunigung $\ddot{y}$ hat, setzt man den Drallsatz am besten um den Schwerpunkt $\mathfrak{S}$ an. Wenn man voraussetzt, daß die Wankachse eine Trägheitshauptachse des Aufbaus ist, kommt für $\lambda \ll 1$

$$I_x\ddot{\lambda} = h\lambda\ \Sigma F_{stat.} - (f/2)\,(\Sigma F_a - \Sigma F_i) - h\ \Sigma S\,. \tag{2}$$[2]

Das erste Moment rechts in (2) stammt von der Summe der Federkräfte unter den statischen Radlasten, die negativ gleich dem Gewicht des Aufbaus ist und lotrecht durch M geht. Das zweite ist das Rückstellmoment der Federung und das dritte das Moment der Summe der Seitenkräfte der Luftreifen, die in M an den Aufbau übertragen werden. Das Vorzeichen des letzteren in (2) gilt für den Fall, daß y und $\ddot{y}$ den gleichen Richtungssinn haben, während in Abb. 2 y und $\ddot{y}$ einander entgegengerichtet angenommen wurden.

Wenn man die Elastizität der Luftreifen berücksichtigt, wird die resultierende Federkonstante für die Hintereinanderschaltung von Hauptfeder und Luftreifen für das Wanken

$$c_\lambda = c_F\, c_R^*/(c_F + c_R^*)\,.$$

Darin muß die Federkonstante des Luftreifens c_R wegen seines größeren Abstandes von der Wankachse entsprechend vergrößert werden:

$$c_R^* = c_R(s/f)^2\,.$$

Für vier gleichharte Hauptfedern und vier gleichartige Luftreifen mit demselben Innendruck wird die Differenz der Kräfte in einer kurvenäußeren und in einer kurveninneren Federkombination $F_a - F_i = c_\lambda f\lambda$ und das resultierende Rückstellmoment für das Wanken ergibt sich wegen

$$\Sigma F_{stat.} = G$$

zu

$$(c_\lambda f^2 - G\,h)\,\lambda = B\lambda\,. \tag{3}$$

Damit wird aus (2)

$$I_x\ddot{\lambda} = -B\lambda - h\ \Sigma S\,. \tag{2a}$$

Bei Einzelradfederung sind die Achsen der Räder eines Radpaares oft über einen Torsionsstab verbunden, der ungleichsinnigen Bewegungen der beiden Räder gegenüber dem Aufbau entgegenwirkt und gleichsinnige nicht beeinflußt. Die Wirkung eines solchen Querstabilisators kann in den Rückstellbeiwert des Wankens B einbezogen werden.

Wegen der Annahme, daß die Seitenkräfte der Räder den Radlasten und den Schräglaufwinkeln proportional sind, hat die Verlagerung der Radlasten in der Kurve keinen Einfluß auf die Summe der Seitenkräfte und man kann ΣS der Gleichung (24) der ersten Arbeit entnehmen:

$$\Sigma S = 2k\left(\frac{2}{v}\dot{y} - 2\psi + \varphi - \zeta\frac{l}{v}\dot{\psi} - \zeta\varphi\right).$$

Damit kommt als Bewegungsgleichung des Wankens

$$-I_x\ddot{\lambda} = B\lambda + h\cdot 2k\left(\frac{2}{v}\dot{y} - 2\psi + \varphi - \zeta\frac{l}{v}\dot{\psi} - \zeta\varphi\right) + d\dot{\lambda}\,. \tag{2b}$$

Darin wurde noch das dämpfende Moment $d\dot{\lambda}$ unter der Voraussetzung einer annähernd geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung durch die hydraulischen Stoßdämpfer eingeführt. Für vier gleiche Stoßdämpfer mit der Dämpfungskonstante k_d, die in der gleichen Entfernung f wie die Federn angeordnet sind, wird $d = k_d f^2$.

[1] S. Fußnote 1, S. 100.

[2] Der Einfachheit halber sei vorangesetzt, daß die Federn in Teleskophülsen geführt sind, deren Oberteile starr mit dem Aufbau verbunden sind.

Aus den Gleichungen (25) der ersten Arbeit[1] für das Schieben und Gieren des Fahrzeugs, sowie für die Lenkschwingung und der Gleichung (2b) für das Wanken folgt das System

$$\left.\begin{aligned} C\ddot{y} + \frac{1}{v}\dot{y} - \psi - \frac{\zeta}{2}\frac{l}{v}\dot{\psi} + \frac{\varphi}{2}(1-\zeta) + hC\dot{\lambda} &= 0\,, \\ \mu C l\ddot{\psi} + \frac{l}{v}\dot{\psi} + 2\zeta\psi - 2\zeta\frac{1}{v}\dot{y} + \varphi(1-\zeta) &= 0\,, \\ \frac{I_\varphi}{nk(1-\zeta)}\ddot{\varphi} + \varphi + \frac{1}{v}\dot{y} + \frac{l}{2v}\dot{\psi} - \psi &= 0\,, \\ \frac{1}{2hk}(I_x\ddot{\lambda} + d\dot{\lambda} + B\lambda) + \frac{2}{v}\dot{y} - 2\psi + \varphi - \zeta\frac{l}{v}\dot{\psi} - \zeta\varphi &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Darin wird im letzten Glied der ersten Zeile die Kopplung zwischen seitlichem Schieben und Wanken nach (1) berücksichtigt. Im ersten Glied der zweiten Zeile tritt im dimensionslosen Faktor μ die Massenverteilung um die Hochachse auf, während in (25) der ersten Arbeit mit $\mu = 1$ eine bestimmte Massenverteilung vorausgesetzt war und andere Werte für μ erst in Fußnoten zu den Endformeln berücksichtigt wurden.

Um nicht zu unhandliche Ausdrücke zu erhalten, werden in (4) zunächst die Kreiselmomente der rollenden Räder weggelassen, die durch das Schwenken der Radachsen infolge des Wankens des Aufbaus, des Gierens des gesamten Fahrzeugs und der Lenkschwingung der Vorderräder auftreten. Sie werden später gesondert eingeführt werden. Das System (4) führt mit den Ansätzen $y = y_0 e^{\sigma t}$, $\psi = \psi_0 e^{\sigma t}$, $\varphi = \varphi_0 e^{\sigma t}$ und $\lambda = \lambda_0 e^{\sigma t}$ auf die Determinante

$$\begin{vmatrix} \left[C\sigma^2 + \frac{1}{v}\sigma\right] & \left[-\zeta\frac{l}{2v}\sigma - 1\right] & \frac{1}{2}(1-\zeta) & hC\sigma^2 \\ -2\zeta\frac{1}{v}\sigma & \left[\mu C l\sigma^2 + \frac{l}{v}\sigma + 2\zeta\right] & (1-\zeta) & 0 \\ \frac{1}{v}\sigma & \left[\frac{l}{2v}\sigma - 1\right] & \left[\frac{I_\varphi}{nk(1-\zeta)}\sigma^2 + 1\right] & 0 \\ \frac{2}{v}\sigma & -\left[\zeta\frac{l}{v}\sigma + 2\right] & (1-\zeta) & \frac{1}{2hk}[I_x\sigma^2 + d\sigma + B] \end{vmatrix} = 0\,. \tag{5}$$

Die Koeffizienten der aus dem Verschwinden der Determinante (5) folgenden charakteristischen Gleichung achten Grades ergeben sich mit $I_x - mh^2 = I_0$ und nach Kürzen durch $C/2hk$ zu

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \mu C l\frac{I_\varphi}{nk(1-\zeta)}I_x\,, \quad a_1 = (\mu+1)\frac{l}{v}\frac{I_\varphi}{nk(1-\zeta)}I_x + \mu C l\frac{I_\varphi}{nk(1-\zeta)}d\,, \\ a_2 &= \mu C l\left[\frac{I_\varphi}{nk(1-\zeta)}B + I_x\right] + \underline{\frac{I_\varphi}{nk(1-\zeta)}\left[2\zeta I_x + \frac{l}{Cv^2}(1-\zeta)^2 I_0\right]} \\ &\quad + (\mu+1)\frac{l}{v}\frac{I_\varphi}{nk(1-\zeta)}d\,, \\ a_3 &= (\mu+1)\frac{l}{v}\frac{I_\varphi}{nk(1-\zeta)}B + \frac{1}{2}\frac{l}{v}(I_x + \mu I_0) + d\cdot\left[\mu C l + \underline{\frac{I_\varphi}{nk(1-\zeta)}\left\{2\zeta + \frac{l}{Cv^2}(1-\zeta^2)\right\}}\right], \\ a_4 &= \mu C l B + \underline{\frac{I_\varphi}{nk(1-\zeta)}B\left[2\zeta + \frac{l}{Cv^2}(1-\zeta^2)\right]} + I_x(1+\zeta) + \frac{\mu+1}{2}\cdot\frac{l}{v}(1+\zeta)d\,, \\ a_5 &= \frac{\mu+1}{2}\cdot\frac{l}{v}B(1+\zeta) + d(1+\zeta)\,, \qquad a_6 = B(1+\zeta)\,, \qquad a_7 = a_8 = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Darin sind die unterstrichenen Glieder zu vernachlässigen. Unendlich harte Federung und unendlich starke Dämpfung verhindern das Wanken vollständig, worauf eine Kontrolle der bisherigen Rechnung beruht. Wenn man alle Koeffizienten statt durch $C/2hk$ durch $B/2hk$ dividiert und $B \to \infty$ gehen läßt, so verschwinden alle Glieder mit B im Nenner, es werden $a_0 = a_1 = 0$, und a_2 bis a_6 gehen über in die Koeffizienten a_0 bis a_4 nach (27) der vorigen Arbeit, wenn man wie dort $\mu = 1$ setzt. Ebenso verschwinden für $d \to \infty$ a_0 und a_6 und a_1 bis a_5 gehen über in a_0 bis a_4 nach (27).

[1] S. Fußnote 1, S. 100.

Da in (6) die beiden letzten Koeffizienten a_7 und a_8 verschwinden, kann die ursprüngliche Gleichung vom achten Grade durch σ^2 dividiert werden, so daß sich eine Gleichung sechsten Grades ergibt:

$$a_0\sigma^6 + a_1\sigma^5 + a_2\sigma^4 + a_3\sigma^3 + a_4\sigma^2 + a_5\sigma + a_6 = 0\,. \tag{7}$$

Das Verschwinden der beiden letzten Koeffizienten, das auch schon in der vorigen Arbeit beobachtet wurde, ist durchaus nicht zufällig. Die daraus entstehende Doppelwurzel $\sigma_{7,8} = 0$ ermöglicht erst das Auftreten eines linear mit der Zeit zunehmenden Gliedes in der Lösung für eine beliebige Koordinate. Dieses letzte Glied stellt den kleinen unmittelbaren Einfluß der Störung durch einen exzentrischen Stoß auf das ganze Fahrzeug dar, der bei der Stabilitätsbetrachtung ausgeschlossen bleiben muß. Die Frage wurde in Abschnitt 8 der vorigen Arbeit ausführlicher behandelt.

5. Kontrolle der Stabilität nach dem Kriterium von Michailow. Wegen der größeren Zahl der a_i und ihres verwickelten Baues ist es nicht gelungen, mit Hilfe der *Hurwitz*determinanten analog dem in der ersten Arbeit beschrittenen Weg die Gleichung einer Grenzfläche der Stabilität in einem Parameterraum aufzustellen. Die Stabilität jedes Zustandes, der durch eine Anzahl physikalischer Konstanten bestimmt ist, muß hier gesondert überprüft werden. Dazu wird das Kriterium nach *Michailow* verwendet, das im folgenden kurz beschrieben werden soll. Ausführlicher wurde es von *M. W. Mejerow*[1] behandelt. Abb. 3a zeigt die Lage der drei Wurzeln $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ einer Gleichung dritten Grades in der *Gauß*schen Ebene, die sämtlich einen negativen Realteil haben sollen. Man kann die Gleichung als Produkt ihrer Linearfaktoren schreiben:

$$f(\sigma) = (\sigma - \sigma_1)(\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3)\,.$$

Setzt man für σ die imaginäre Zahl $i\nu$, so wird

$$f(i\nu) = (i\nu - \sigma_1)(i\nu - \sigma_2)(i\nu - \sigma_3)\,,$$

wobei die drei Linearfaktoren durch die Pfeile in Abb. 3a dargestellt sind. Der Betrag des Produktes dieser komplexen Zahlen ist gleich dem Produkt ihrer Beträge und das zugehörige Argument gleich der Summe ihrer Argumente. Läßt man nun ν von 0 bis $+\infty$ wachsen, so ergibt sich zunächst bei $\nu = 0$ für $f(i\nu)$ das Argument 0, die Ortskurve beginnt auf der reellen, positiven Halbachse. Für $\nu = \infty$ wächst das Argument des ersten Linearfaktors um $\pi/2$ und das der beiden anderen für die konjugiert komplexen Lösungen zusammen um π, so daß für $\nu = \infty$ die Funktion $f(i\nu)$ das Argument $3\pi/2$ und den Betrag ∞ hat (Abb. 3b).

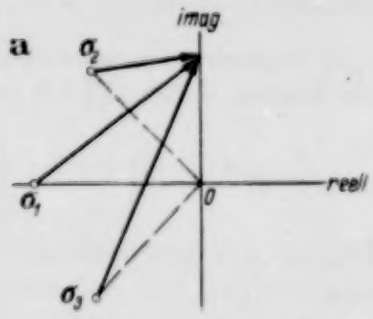


Abb. 3. a. Linearfaktoren einer Gleichung dritten Grades.

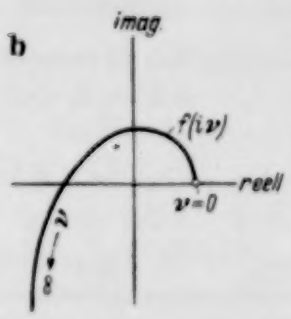


Abb. 3. b. Ortskurve $f(i\nu)$ einer Gleichung dritten Grades.

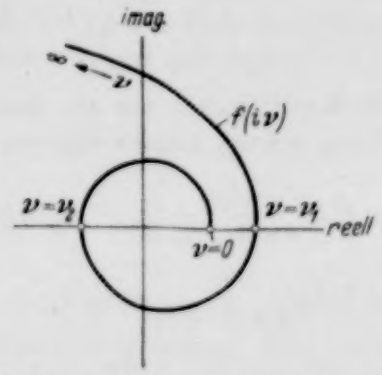


Abb. 4. Ortskurve $f(i\nu)$ einer Gleichung sechsten Grades, deren sämtliche Wurzeln negative Realteile haben.

Allgemein muß das Argument von $f(i\nu)$ stetig von 0 auf $n\pi/2$ wachsen, wenn ν von 0 bis $+\infty$ wächst und n der Grad der Gleichung ist. Das ist nur möglich, wenn alle Wurzeln links von der imaginären Achse liegen, so daß der Verlauf der Kurve $f(i\nu)$ über die Stabilität des durch die charakteristische Gleichung $f(\sigma) = 0$ bestimmten Systems entscheidet.

In unserem Fall ist die charakteristische Gleichung (7) vom sechsten Grade. Wenn man für σ wieder $i\nu$ setzt, so wird aus (7)

$$f(i\nu) = -a_0\nu^6 + i\,a_1\nu^5 + a_2\nu^4 - i\,a_3\nu^3 - a_4\nu^2 + i\,a_5\nu + a_6 = 0\,. \tag{8}$$

Es ist nun nicht nötig, diese Kurve in der komplexen Ebene aufzuzeichnen, da man aus der Lage ihrer Schnittpunkte mit der reellen Achse bereits auf das Wesentliche ihres Verlaufes schließen kann. Das Nullsetzen des Imaginärteils von (8) führt nach Division durch ν auf die biquadratische Gleichung $a_1\nu^4 - a_3\nu^2 + a_5 = 0$. Damit wird

$$\nu^2_{1,2} = \frac{a_3 \pm \sqrt{a_3^2 - 4\,a_1\,a_5}}{2\,a_1}\,. \tag{9}$$

[1] *M. W. Mejerow*, Grundlagen der selbsttätigen Regelung elektrischer Maschinen, S. 64, Berlin 1954.

Der Realteil von (8) muß nun für $\nu = 0$ positiv, für die kleinere Frequenz ν_2 negativ und für die größere Frequenz ν_1 wieder positiv werden, wenn $f(i\,\nu)$ mit zunehmendem ν die Quadranten der Reihe nach durchlaufen soll (Abb. 4).

Da wegen $a_6 > 0$ die erste Bedingung stets erfüllt ist, bleiben als Stabilitätsbedingungen:

$$\left.\begin{aligned} -a_0\,\nu_1^6 + a_2\,\nu_1^4 - a_4\,\nu_1^2 + a_6 > 0\,, \\ -a_0\,\nu_2^6 + a_2\,\nu_2^4 - a_4\,\nu_2^2 + a_6 < 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

worin ν_1^2 bzw. ν_2^2 der Gleichung (9) zu entnehmen ist.

Auf diese Weise läßt sich der durch die charakteristische Gleichung (7) mit den Koeffizienten nach (6) gegebene Zustand des Kraftwagens ziemlich rasch auf Stabilität untersuchen. Ein gefederter Wagen wird bei niedrigerer Geschwindigkeit unstabil als ein ungefederter; doch ist die Abnahme der Stabilität bei normaler Federung und Dämpfung nicht allzu groß, solange man nicht den im ganzen sehr schädlichen Einfluß der Kreiselmomente der Räder in Rechnung stellt. Bevor das geschehen kann, müssen noch einige Eigenheiten der Kraftwagenfederung behandelt werden.

6. Hindernisfederung und Kurvenfederung. Die obere Reihe der Skizzen in Abb. 5 zeigt das Verhalten eines Rades beim Überfahren eines einseitigen Hindernisses für verschiedene Radaufhängungen. Man sieht, daß bei Parallelführung die Radachse nur verschoben, aber nicht hochgeschwenkt wird, so daß kein Kreiselmoment geweckt wird. Dagegen entstehen bei den Pendelachsen starke Kreiselmomente, die um so größer sind, je mehr die Pendelachsen verkürzt werden. Beim Überfahren einer einseitigen Unebenheit ist in diesen Fällen die Störung durch das Kreiselmoment des Vorderrades viel stärker als die durch das Moment der horizontalen Komponente der Stoßkraft um den Lenkzapfen, von der bisher ausgegangen wurde. Unter diesen Umständen hilft es nicht viel, daß Kreiselmoment und Moment der Stoßkraft entgegengesetzten Drehsinn haben. Wie aus Abb. 5c ersichtlich, sucht das Kreiselmoment $I_w\,\omega\,\dot{\lambda}_R$ das linke Vorderrad des gegen die Bildebene fahrenden Wagens zur Wagenmitte einzuschlagen, während das Stoßmoment das Rad nach außen einzuschlagen sucht. Deshalb hat schon *de Lavaud*[1] vorgeschlagen, bei starren Vorderachsen den Abstand des Lenkzapfens vom Vorderrad zu vergrößern und so das Stoßmoment dem Kreiselmoment anzugleichen. Dabei ist jedoch zu bedenken, daß die beiden Momente nicht gleichzeitig ihr Maximum erreichen, das beim Kreiselmoment mit dem größten $\dot{\lambda}_R$, beim Stoßmoment mit der größten Horizontalkomponente der Bodenkraft auftritt. Die Vorgänge beim Überfahren eines Einzelhindernisses, die für den zeitlichen Verlauf der beiden Momente von Bedeutung sind, hat *E. Marquard*[2] behandelt.

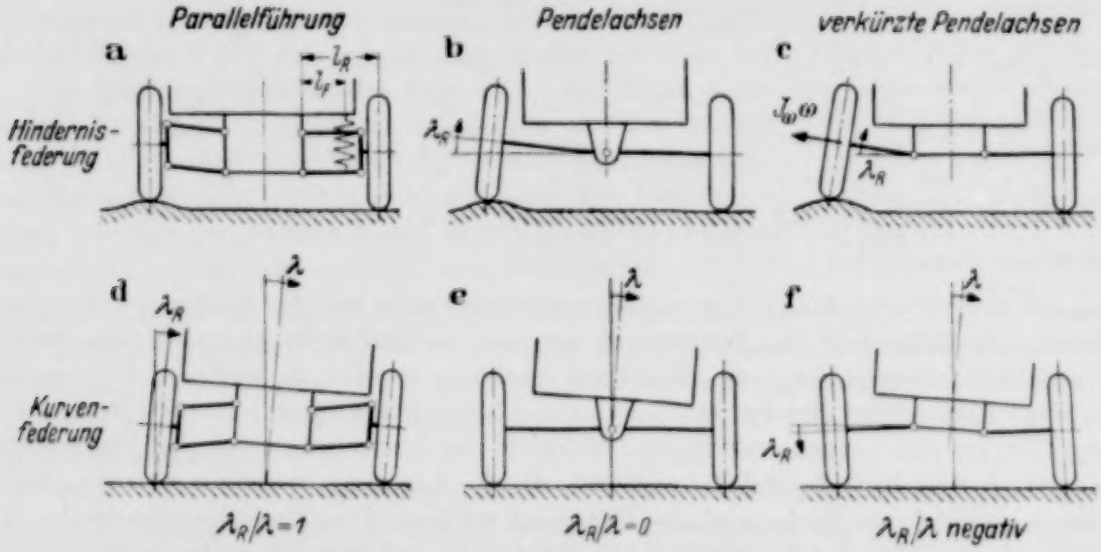


Abb. 5. Hindernisfederung und Kurvenfederung bei verschiedenen Radaufhängungen.

Die Entwicklung ist seit *de Lavaud* in Richtung der ebenfalls von ihm empfohlenen Einzelaufhängung der Vorderräder verlaufen und hat zu den sog. „flattersicheren" Parallelführungen der Vorderräder geführt, die heute bei den Personenautos vorherrschen, während die Lastwagen meist bei der Starrachse geblieben sind. Die Parallelführung hat nämlich beim Durchfahren einer Kurve den schweren Nachteil, daß die Räder die Neigung des Aufbaus voll mitmachen müssen (Abb. 5d), was

[1] *S. de Lavaud*, Causerie scientifique, Paris 1927 (im Selbstverlag des Verfassers).
[2] *E. Marquard*, Schwingungsdynamik des schnellen Straßenfahrzeugs, Essen 1952.

zu starken Kreiselmomenten der Vorderräder um ihre Lenkzapfen führt. Diese Kreiselmomente bilden bei hohen Geschwindigkeiten neben den seitlichen Windstößen die Hauptgefahr für die Stabilität, wie sich in den folgenden Abschnitten zeigen wird. Bei den Personenwagen kann man ihren Einfluß durch leichte Räder und tiefe Schwerpunktslage verringern, bei den Lastwagen ist beides nicht möglich. Deswegen hat sich gerade bei schnellfahrenden Lastwagen die starre Vorderachse gehalten, die nur eine kleine Kurvenneigung der Räder infolge der Reifeneindrückung erlaubt. Auch die Eingelenkpendelachsen (Abb. 5e) zeigen in der Kurve ein ähnlich günstiges Verhalten, das sich erst bei stärkerer Verkürzung der Pendelachsen wieder verschlechtert. Ungünstig ist bei den Pendelachsen, daß durch Belastungsänderung oder durch Überfahren einer Bodenwelle starke Änderungen der Spurweite und des Radsturzes[1] (letzteres bedeutet praktisch große λ_R) entstehen.

7. Die Kreiselmomente der Räder. Infolge der Gier- und Lenkschwingung um zwei praktisch parallele Achsen und des Wankens um eine dazu annähernd normale Achse üben die rotierenden Räder Kreiselmomente auf ihre Lagerung aus, durch die diese drei Freiheitsgrade der Bewegung gyroskopisch gekoppelt werden. Es entstehen die Momente:

durch das Kippen der Hinterräder	$2\, I_\omega \frac{v}{r} \dot{\lambda}_R$	um die Hochachse,	(11)
durch das Kippen eines Vorderrades	$-\, I_\omega \frac{v}{r} \dot{\lambda}_R$	um den Lenkzapfen[2],	
durch Gieren aller vier Räder	$-4\, I_\omega \frac{v}{r} \dot{\psi}$	um die Wankachse.	
und durch die Lenkschwingung der Vorderräder	$2\, I_\omega \frac{v}{r} \dot{\varphi}$		

Für kleinere Schwingungen kann man den Kippwinkel λ_R der Räder der Seitenneigung des Aufbaus λ proportional setzen. Damit wird $\dot{\lambda}_R = \dot{\lambda}\,(\lambda_R/\lambda)$. Die Konstante $\lambda_R/\lambda = \overline{MM_R}/\overline{AM_R}$ (Abb. 1); sie ist positiv, wenn A und M_R auf verschiedenen Seiten des Fahrzeugs liegen, andernfalls ist sie negativ, d. h. Aufbau und Räder neigen sich in der Kurve nach verschiedenen Seiten (Abb. 5f). Durch die verschiedene Eindrückung der Luftreifen kommt zu dem so berechneten Wert noch ein kleiner positiver Betrag hinzu, der für Parallelführung verschwindet. Im folgenden Schema sind die Elemente zusammengestellt, durch die die Determinante (5) infolge der Kreiselmomente ergänzt werden muß:

$$\begin{vmatrix} --- & --- & --- & --- \\ --- & --- & --- & \frac{1}{k\,l} \cdot \left[2\, I_\omega \frac{v}{r} \left(\frac{\lambda_R}{\lambda}\right) \sigma\right] \\ --- & --- & --- & \frac{1}{n\,k\,(1-\zeta)} \cdot \left[-\, I_\omega \frac{v}{r} \left(\frac{\lambda_R}{\lambda}\right) \sigma\right] \\ --- & \frac{1}{2\,h\,k}\left[-4\, I_\omega \frac{v}{r} \sigma\right] & \frac{1}{2\,h\,k}\left[2\, I_\omega \frac{v}{r} \sigma\right] & --- \end{vmatrix} \qquad (12)$$

Den Einfluß der verschiedenen Kreiselmomente sieht man aus der Größe der Faktoren vor den eckigen Klammern. Danach ist das Element in der zweiten Zeile bedeutungslos, das von den Kreiselmomenten der Hinterräder infolge des Wankens stammt; es wird im weiteren Rechnungsgang vernachlässigt. Das Element in der dritten Zeile, das das Kreiselmoment eines Vorderrades infolge des Wankens enthält, ist das weitaus wichtigste. Obwohl die Kreiselmomente der Vorderräder und der Hinterräder nahezu gleich sind, sind die ersteren, die die Lenkung beeinflussen unvergleichlich wirksamer als die letzteren, die direkt auf das Fahrzeug wirken. Die Kreiselmomente der Vorderräder infolge des Wankens sind der Stabilität sehr abträglich und müssen stets berücksichtigt werden. Die Elemente der vierten Zeile stammen von den Kreiselmomenten von Vorder- und Hinterrädern infolge der Gier- und Lenkschwingungen. Diese sind im ganzen für die Stabilität günstig, aber von geringerem Einfluß als das Element in der dritten Zeile. Sie sind hier als direkt am Aufbau angreifend angenommen, während sie tatsächlich an der vernachlässigten Zwischenmasse angreifen und Hauptfeder und Reifen im entgegengesetzten Sinn belasten.

[1] Der Sturzwinkel, den die Radebene mit einer Normalebene zur Fahrbahn mit gemeinsamer Spur auf dieser einschließt, hat einen kleinen, hier vernachlässigten Einfluß auf die vom Rad aufgenommene Seitenkraft.

[2] Der positive Drehsinn für φ wurde dem für ψ entgegengesetzt angenommen (s. Fußnote 1, Seite 100, dort Abb. 3).

Wenn man die Elemente der Determinante (5) durch die Kreiselglieder nach dem Schema (12) ergänzt und die Koeffizienten neu errechnet, so kommen zu den Koeffizienten a_2 bis a_5 nach (6) folgende Ergänzungen:

$$\left.\begin{aligned} a_{2k} &= 2\,\mu\,C\,l\,\frac{I_\omega^2}{n\,k\,(1-\zeta)}\left(\frac{\lambda_R}{\lambda}\right)\frac{v^2}{r^2}\,, \\ a_{3k} &= 2\,\mu\,h\,C\,l\,\frac{I_\omega}{n}\left(\frac{\lambda_R}{\lambda}\right)\frac{v}{r} + \frac{2\,(\mu+1)\,l\,I_\omega^2}{n\,k\,r\,(1-\zeta)}\left(\frac{\lambda_R}{\lambda}\right)\frac{v}{r}\,, \\ a_{4k} &= \frac{2\,h\,l}{r}\,\frac{I_w}{n}(1+\zeta)\left(\frac{\lambda_R}{\lambda}\right) + \frac{4\,I_\omega^2}{n\,k\,(1-\zeta)}\left(\frac{\lambda_R}{\lambda}\right)\frac{v^2}{r^2}\,, \\ a_{5k} &= 4\,h\,\frac{I_w}{n}(1+\zeta)\left(\frac{\lambda_R}{\lambda}\right)\frac{v}{r} + \frac{4\,I_\omega^2}{C\,n\,k\,r}(1+\zeta)\left(\frac{\lambda_R}{\lambda}\right)\frac{v}{r}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Darin sind mehrere bedeutungslose Glieder bereits weggelassen. Die nicht unterstrichenen Glieder entstehen ausschließlich aus den Kreiselmomenten der Vorderräder um ihre Lenkzapfen infolge des Wankens und müssen stets berücksichtigt werden. Die restlichen Glieder ergeben sich aus den Kreiselmomenten aller Räder um die Wankachse infolge des Gierens des Fahrzeugs und der Lenkschwingung. Sie müssen bei sehr hohen Geschwindigkeiten (etwa ab 150 km/h) beachtet werden.

Die Kreiselwirkung der Räder soll so klein wie möglich gehalten werden. Auf den ersten Blick scheint es am besten, den in allen Gliedern vorkommenden Faktor (λ_R/λ) zum Verschwinden zu bringen, d. h. die Vorderräder so aufzuhängen, daß sie das seitliche Wanken des Aufbaus in der Kurve nicht mitmachen. In Abschnitt 6 wurde gezeigt, daß eine solche Radaufhängung durch Eingelenkpendelachsen beim Überfahren eines Hindernisses zum Hochschwenken der betreffenden Achse und damit zu einer Störung durch ein Kreiselmoment führt. Daher sind bei den Vorderrädern die Pendelachsen ziemlich selten und man findet sie nur bei einigen Kleinstwagen neuerer Bauart. Die meisten Kraftwagen haben Parallelführung der Vorderräder mit $\lambda_R/\lambda = 1$. Sie vermeiden dadurch zwar die Störung durch das Kreiselmoment eines Vorderrades beim Überfahren einer Unebenheit, bringen aber im Ablauf der Bewegung des durch das unvermeidliche Stoßmoment um den Lenkzapfen gestörten Fahrzeugs die Kreiselmomente vor allem der Vorderräder voll ins Spiel.

Es ist deshalb zu erwägen, ob es nicht besser wäre, beim Überfahren einer Unebenheit ein kleines Kreiselmoment zuzulassen, das ja dem aus dem gleichen Anlaß auftretenden Stoßmoment entgegengerichtet wäre. Das letztere kann dadurch vergrößert werden, daß der Lenkzapfen keine Spreizung erhält. Das würde zu einer Radaufhängung durch Querlenker führen, die nicht parallel sind, sondern gegen die Wagenmitte zu zusammenlaufen, wobei der Schnittpunkt ihrer Mittellinien M_R bei ungestörter Fahrt etwa in der Ebene des gegenüberliegenden Rades liegt (Abb. 6). Dann wäre mit $\lambda_R/\lambda \approx 0{,}5$ die Wirkung der Kreiselmomente auf den Ablauf der Bewegung stark herabgesetzt. Auch die Hebung des Momentanpols M_1 und die sich daraus ergebende Verkürzung des Hebelarms der Fliehkraft h wirken im gleichen Sinne. Die Hinterräder könnten an Eingelenkpendelachsen mit tiefliegendem Drehpunkt M_2 gelagert sein, so daß die Wankachse $\overline{M_1 M_2}$ nahezu horizontal verläuft.

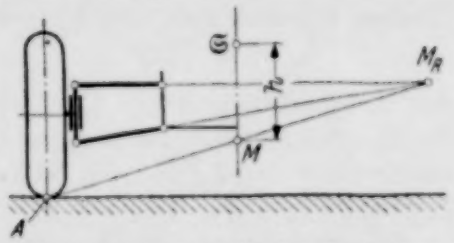


Abb. 6. Schema einer Vorderradaufhängung mit $\lambda_R/\lambda = 0{,}5$.

Bei der üblichen Parallelführung der Vorderräder liegt M_1 etwa in Fahrbahnhöhe. Um den Hebelsarm der Fliehkraft zu verringern, wird M_2 durch die Verwendung verkürzter Pendelachsen für die Hinterräder hoch gelegt, wodurch die Wankachse in einem Winkel bis 10° gegen die Fahrbahn von vorne nach hinten ansteigt.

Aus den Ausdrücken (13) sieht man, daß die Wirkung der Kreiselmomente der Räder auf das bereits gestörte Fahrzeug vor allen von λ_R/λ, h und der Drehmasse I_ω eines Rades um seine Achse abhängt, die alle in den ursprünglichen Koeffizienten nach (6) nicht vorkommen. Zumindest eine dieser drei Größen muß so klein wie möglich gehalten werden, wenn nicht bereits bei erreichbaren Fahrgeschwindigkeiten Unstabilität des Fahrzeugs eintreten soll.

8. Überprüfung der Lenkstabilität eines langsamen Personenkraftwagens. In diesem und den folgenden Abschnitten wird die Lenkstabilität von drei ausgeführten Kraftwagen bei der jeweils angegebenen Höchstgeschwindigkeit überprüft. Die Wagen unterscheiden sich in Bauart und Verwendungszweck grundlegend voneinander. Alle Daten, die von den Herstellerwerken der Fachliteratur übergeben wurden, sind in der Berechnung verwendet. Leider genügen diese Angaben keineswegs. Der Verfasser war bemüht, den restlichen zur Berechnung notwendigen Größen technisch mögliche Werte zu geben.

Das erste Beispiel behandelt einen sehr leichten, aber geräumigen Personenwagen mit Kurbelachsen vorne und hinten, was etwa einer Parallelführung der Räder durch horizontale Querlenker entspricht ($\lambda_R/\lambda = 1$). Die Wankachse liegt in diesem Fall in Fahrbahnhöhe, so daß als Hebelsarm der Fliehkraft die ganze Schwerpunktshöhe über der Fahrbahn auftritt. Von einem solchen Fahrzeug kann man keine Stabilität bei hohen Geschwindigkeiten verlangen. In der Tat ist es mit einem für seine Größe ausnehmend schwachen Motor ausgerüstet, mit dem es nur eine Höchstgeschwindigkeit von rd. 80 km/h erreichen kann. Vor allem die geringe axiale Drehmasse der verwendeten Räder bewirkt, daß das Fahrzeug bei dieser Geschwindigkeit noch stabil bleibt. Bei der Wahl des Rückstellbeiwertes des Wankens wurde die auffallend weiche Federung berücksichtigt.

Angaben: Fahrzeuggewicht $G = 495$ kp (mit Fahrer $G = 600$ kp), Radstand $l = 2{,}4$ m, Spurweite $s = 1{,}26$ m, Höchstgeschwindigkeit $v_{max} = 80$ km/h.

Annahmen:

Wirksamer Hebelsarm der Fliehkraft	$h = 0{,}5$ m,
Drehmasse des Aufbaus um die Längsschwerachse	$I_x = 30$ kpms^2,
Drehmasse eines Rades um den Lenkzapfen	$I_\varphi = 0{,}02$ kpms^2,
Drehmasse eines Rades um den Achsschenkel	$I_w = 0{,}03$ kpms^2,
wirksamer dynamischer Halbmesser eines Rades	$r = 0{,}3$ m,
wirksamer Nachlauf der Vorderräder	$n = 0{,}02$ m,
Federkonstante einer Hauptfeder	$c_F = 4700$ kp/m,
Federkonstante eines Luftreifens	$c_R = 10000$ kp/m,
Federarm/Radarm (Abb. 5a)	$l_F/l_R = 0{,}6$,
Dämpfungskonstante eines Stoßdämpfers	$k_d = 175$ kpm^{-1}s,
Beiwert der Massenverteilung um die Hochachse	$\mu = 1$,
Beiwert der Radlaständerung durch den Luftwiderstand	$\zeta = 0{,}75 \cdot 10^{-4}\, v^2$,
Seitensteifigkeit eines Rades unter der statischen Radlast	$k = 1200$ kp/rad.

Damit werden die Federkonstante einer Hauptfeder, bezogen auf die Spurweite

$$c_F^* = c_F\,(l/_F l_R)^2 = 1690 \text{ kp/m},$$

die resultierende Federkonstante jedes Rades

$$c_\lambda = \frac{c_F^* \cdot c_R}{c_F^* + c_R} = 1450 \text{ kp/m},$$

und der Rückstellbeiwert des Wankens

$$B_\lambda = c_\lambda\, s^2 - G\, h = 2000 \text{ kpm}.$$

Weiter ergeben sich mit $k_d^* = k_d\,(l_F/l_R)^2 = 63$ kpm^{-1}s der Dämpfungsbeiwert des Wankens zu

$$d = k_d^*\, s^2 = 100 \text{ kpms},$$

der Trägheitsbeiwert zu $C = m/4\,k = 0{,}0125$ m^{-1} s^2,
die Rechengröße I_0 zu $\quad I_0 = I_x - m\,h^2 = 15$ kpms^2
sowie für $v = 22{,}2$ m/s ($= 80$ km/h) der Beiwert der Radlaständerung durch den Luftwiderstand zu $\zeta = 0{,}0369$.

Damit kommen die Koeffizienten nach (6) samt ihren Ergänzungen infolge der Kreiselmomente nach (13), wenn jeweils die unterstrichenen Glieder weggelassen werden,

$a_0 = 0{,}780 \cdot 10^{-3}$, $a_1 = 0{,}820 \cdot 10^{-2}$, $a_2 = 0{,}970$, $a_3 = 9{,}13$, $a_4 = 114{,}8$, $a_5 = 558$, $a_6 = 2074 \cdot$

(Die a_i sind nicht dimensionslos, a_6 hat die Einheit kpm, a_5 kpms usw.).

Nach (9) wird

$$\nu_1^2 = 1048, \quad \nu_2^2 = 64{,}8$$

und nach (10)

$$-a_0\,\nu_1^6 + a_2\,\nu_1^4 - a_4\,\nu_1^2 + a_6 = 5{,}0 \cdot 10^4 > 0,$$
$$-a_0\,\nu_2^6 + a_2\,\nu_2^4 - a_4\,\nu_2^2 + a_6 = -15{,}0 \cdot 10^2 < 0.$$

Der Zustand des Fahrzeugs ist demnach bei $v = 80$ km/h stabil. Wenn der Rechnungsgang für eine Geschwindigkeit von 100 km/h wiederholt wird, was wegen $\zeta = \zeta(v)$ eine Neuberechnung sämtlicher a_i nötig macht, ergibt sich bereits Unstabilität.

9. Darstellung des Einflusses von Parametern. Der Einfluß eines Parameters τ, der nur in der Art

$$Q(i\,\nu) + \tau\, R(i\,\nu) = 0 \tag{14}$$

in die Gleichung (8) $f(i\,\nu) = 0$ eingehen muß, kann mit

$$\bar{\tau} = \frac{-Q(i\,\nu)}{R(i\,\nu)}$$

in der Ebene der komplexen Zahlen dargestellt werden.

Wählt man als Parameter die Drehmasse eines Vorderrades um den Achsschenkel $\tau = I_\omega$, was für nicht zu große Geschwindigkeiten zulässig ist, da dann die unterstrichenen Glieder in (13) weggelassen werden können, so sind in

$$Q(i\,\nu) = \sum_{n=0}^{6} a_{n,0}\,\nu^{6-n}$$

und

$$R(i\,\nu) = \sum_{n=0}^{6} a_{n,\tau}\,\nu^{6-n}$$

mit den Werten des obigen Beispiels die Koeffizienten

sowie

$$a_{0,0} = a_0, \quad a_{1,0} = a_1, \quad a_{2,0} = a_2, \quad a_{6,0} = a_6$$
$$a_{0,\tau} = 0, \quad a_{1,\tau} = 0, \quad a_{2,\tau} = 0, \quad a_{6,\tau} = 0$$

und

$$a_{3,0} = 5{,}80, \quad a_{4,0} = 102{,}3 \quad a_{5,0} = 328,$$
$$a_{3,\tau} = 111, \quad a_{4,\tau} = 415 \quad a_{5,\tau} = 7670$$

einzusetzen.

Die Kurve $\bar{\tau}(i\,\nu)$ schneidet die reelle Achse ein- oder mehrmals und legt so die Grenzwerte fest, innerhalb der man $\tau\,(= I_\omega)$ verändern kann, ohne daß der Zustand des Fahrzeugs unstabil wird. Wo der stabile Bereich liegt, muß man durch Einsetzen eines Wertes für I_ω in dem betreffenden Bereich nach dem *Michailow*-Kriterium ermitteln.

Die Kurve $\bar{\tau}(i\,\nu)$ für $\nu = 0$ bis $-\infty$ ist das Spiegelbild der Kurve $\bar{\tau}(i\,\nu)$ für $\nu = 0$ bis $+\infty$ bezüglich der reellen Achse. Die Punkte auf den Kurven $\bar{\tau}(i\,\nu)$ sind in Abb. 7 und Abb. 8 mit dem Wert der Frequenz ν bezeichnet, für den sie errechnet wurden. Die beiden Äste von $\bar{\tau}(i\,\nu)$ zerlegen in Abb. 7 die komplexe Ebene in mehrere Gebiete. Wenn man die Begrenzung des stabilen Gebiets innerhalb desselben durch Schraffur auszeichnet und diese Schraffur auch dort fortsetzt, wo die Kurven nicht mehr die Grenze des stabilen Gebiets bilden, kann man die sog. Schraffurregel von *Neimark*[1] anwenden:

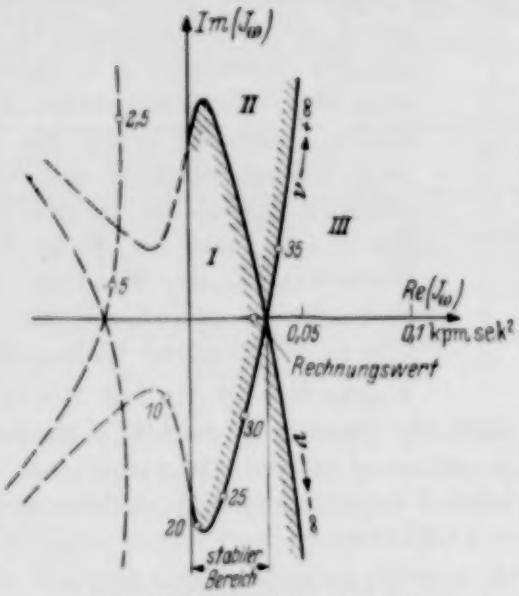


Abb. 7. Einfluß der axialen Drehmasse eines Vorderrades auf die Stabilität.

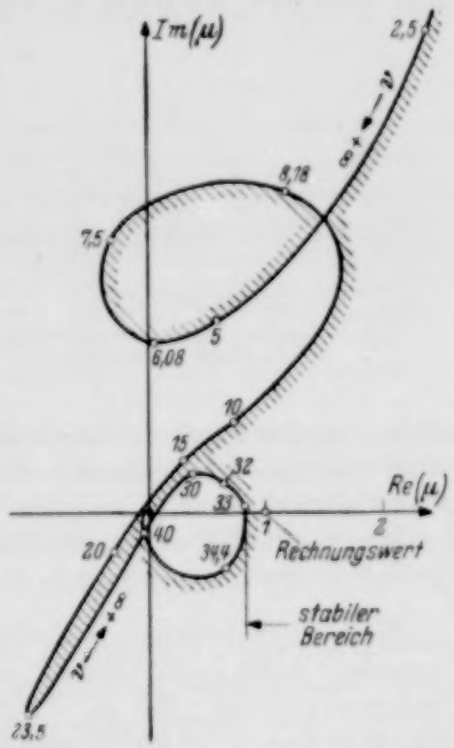


Abb. 8 (rechts). Einfluß der Massenverteilung um die Hochachse auf die Stabilität.

Bei jedem Durchgang durch die Kurve von der schraffierten Seite her geht eine Wurzel der charakteristischen Gleichung mit negativem Realteil in eine Wurzel mit positivem Realteil über. Z. B. kommt man bei Vergrößern des Parameters I_ω, der nur reeller positiver Werte fähig ist, aus dem stabilen Gebiet *I* gleich in das Gebiet *III* mit zwei Wurzeln mit positivem Realteil, die natürlich konjugiert komplex sind. An Stelle von lauter gedämpften Frequenzen tritt jenseits des Grenzwertes von I_ω auf der reellen Achse eine angefachte Frequenz auf, während die übrigen (zunächst) gedämpft bleiben. In Abb. 7 ist auch der ausgeführte Wert von I_ω eingetragen. Man sieht, daß schon eine verhältnismäßig geringe Vergrößerung der axialen Drehmasse der Räder den Fahrzustand bei der Höchstgeschwindigkeit unstabil machen würde. Der Verlauf der Funktion $\bar{\tau}(i\,\nu)$ links von der imaginären Achse ist praktisch bedeutungslos.

Wenn man als Parameter statt I_ω das Verhältnis des Kippwinkels der Vorderräder zur Seitenneigung des Aufbaus λ_R/λ wählt, erhält man einen ähnlichen Verlauf von $\bar{\tau}(i\,\nu)$ wie in Abb. 7, da λ_R/λ in denselben Koeffizienten auftritt wie I_ω. Nur der Maßstab ist dann ein anderer. Der wirksame Hebelsarm der Fliehkraft h kann nicht als Parameter gewählt werden, da er wegen $I_0 = I_x - m\,h^2$

[1] S. *M. W. Mejerow*, Grundlagen der selbsttätigen Regelung elektrischer Maschinen, S. 68, Berlin 1954.

nicht in der Art (14) in die Gleichung (8) eingeht. Davon abgesehen, gilt für h dasselbe wie für I_ω und λ_R/λ.

Dagegen kann der Einfluß der Massenverteilung um die Hochachse bei gegebenem Radstand und gegebener Gesamtmasse dargestellt werden. Es ist dann $\tau = \mu = I_z \Big/ \frac{m\,l^2}{4}$

Mit den Werten des obigen Beispiels, bei dem $\mu = 1$ gesetzt wurde, werden

$a_{0,0} = 0$, $a_{1,0} = 0{,}00281$, $a_{2,0} \approx 0$, $a_{3,0} = 5{,}94$, $a_{4,0} = 54{,}8$, $a_{5,0} = 446$,

$a_{0,\tau} = a_0$, $a_{1,\tau} = 0{,}00539$, $a_{2,\tau} = 0{,}97$, $a_{3,\tau} = 3{,}19$, $a_{4,\tau} = 60{,}0$, $a_{5,\tau} = 112$

sowie

$a_{6,0} = a_6$, $a_{6,\tau} = 0$.

In diesem Fall ist der Nenner von $\bar{\tau}(i\,\nu)$, d. i. die Funktion $R(i\,\nu)$ in (14) vom sechsten Grade und $\bar{\tau}(i\,\nu)$ hat deshalb in der komplexen Ebene einen ziemlich verwickelten Verlauf (s. Abb. 8). Für $\nu = 0$ ist $\bar{\tau}(i\,\nu) = -\infty$ und für $\nu \to \infty$ geht $\bar{\tau}(i\,\nu) \to 0$. Die mit unrunden Zahlen bezeichneten Punkte der Kurve sind für die Nullstellen des Realteils oder des Imaginärteils des Nenners errechnet.

Da der Parameter μ wieder nur reelle positive Werte annehmen kann, sind nur die Schnittpunkte der Kurve mit der reellen positiven Achse interessant. Die Grenze des stabilen Bereichs liegt hier bei $\mu = 0{,}85$. Eine Vergrößerung des Faktors μ, d. h. der Drehmasse des Fahrzeugs um die Hochachse, bei gleichbleibendem Gewicht und Radstand wirkt stabilisierend. Diese Folgerung gilt ganz allgemein, da der Charakter der Funktion $\bar{\tau}(i\,\nu)$ auch für andere Fahrzeugdaten erhalten bleibt. Sie stimmt auch mit den Erfahrungen überein, die mit Rennwagen gemacht wurden.[1]

10. Überprüfung der Lenkstabilität eines schnellen Sportwagens. Die für dieses Fahrzeug der Literatur entnommenen Angaben sind: Gewicht $G = 1300$ kp, Radstand $l = 2{,}4$ m, Spurweite $s = 1{,}4$ m (Mittelwert) und Höchstgeschwindigkeit $v_{max} = 240$ km/h (66,7 m/s). Es handelt sich also um einen sehr schnellen Kraftwagen, weshalb die Koeffizienten der charakteristischen Gleichung nach (6) durch die vollständigen, von den Kreiselmomenten stammenden Ausdrücke (13) ergänzt werden müssen. Abb. 9 zeigt links die Vorderradaufhängung an parallelen Querlenkern, während rechts die Hinterradaufhängung durch Eingelenkpendelachsen mit tiefliegendem Drehpunkt zu sehen ist. Beides ist an dem betreffenden Fahrzeug ausgeführt, doch sind die Maße in Abb. 9 angenommen. Die Momentanpole des Wankens für die beiden verschiedenen Radaufhängungen sind M_1 und M_2. Bei einer Schwerpunktslage in der Mitte des Radstandes liegt der Schnittpunkt der Wankachse $\overline{M_1 M_2}$ mit der Querschnittsebene durch $\mathfrak{S}$ in Abb. 9 in der Mitte zwischen M_1 und M_2. Damit wird $h = 0{,}275$ m. Nachdem $\lambda_R/\lambda = 1$ ist und die Räder bei einem so schnellen Fahrzeug eher größer als normal sein müssen, so daß man I_ω nicht sehr klein halten kann, trägt ein kleines h am meisten zur Stabilisierung bei.

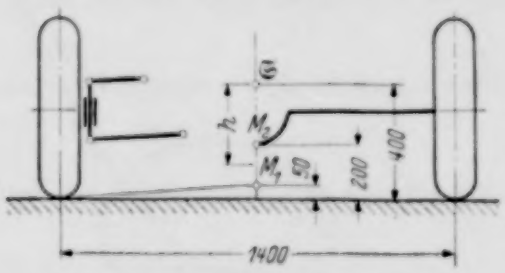


Abb. 9. Vorder- und Hinterradaufhängung eines schnellen Sportwagens.

Für die Räder wurde gewählt: $r = 0{,}324$ m,

$$I_\omega = 0{,}045\ \text{kpms}^2, \qquad I_\varphi = 0{,}035\ \text{kpms}^2, \qquad n = 0{,}02\ \text{m}, \qquad k = 1500\ \text{kp/rad}.$$

Wenn man bedenkt, daß das schon in der ersten Arbeit behandelte ungefederte Fahrzeug eine besonders hohe Lenkstabilität aufweist, wird man für sehr schnelle Fahrzeuge eine ziemlich harte Federung wählen. Mit $c_R = 20000$ kp/m und $c_F^* = 8000$ kp/m, wobei der letztere Wert für $f = s$ gilt, wird $c_\lambda = 5720$ kp/m, und $B = 10850$ kpm. Mit einer spezifischen Dämpfung der Relativbewegung zwischen Achse und Aufbau bei reiner Hubschwingung $D = 0{,}25$ wird $k_d^* = 0{,}25 \cdot 2\sqrt{\frac{m}{4} \cdot c_F} = 255\ \text{kpm}^{-1}\text{s}$ und $d = k_d^* s^2 = 500$ kpms. Für die Parallelführung vorne sind $c_F^* \cdot (l_R/l_F)^2$, bzw. $k_d^*(l_R/l_F)^2$ (Abb. 5a) die Konstanten einer Hauptfeder, bzw. eines Stoßdämpfers, während diese Werte für die Pendelachsen mit $(s/f)^2$ multipliziert werden müssen. Die Drehmasse des Aufbaus um seine Längsschwerachse wurde zunächst mit $I_x = 75\ \text{kpms}^2$ angenommen. Obwohl hier die Wankachse $\overline{M_1 M_2}$ zur Längsschwerachse nicht genau parallel ist, gilt für die Rechengröße I_0 annähernd $I_0 = I_x - m\,h^2 = 65{,}2\ \text{kpms}^2$. Als Beiwert der Massenverteilung um die Hochachse wurde $\mu = 1$ gewählt, was bedeutet, daß man die Fahrzeugmasse in 2 Punkten zwischen den Radpaaren konzentriert denken kann. Der Trägheitsbeiwert ergibt sich zu $C = m/4\,k = 0{,}02165\ \text{m}^{-1}\,\text{s}^2$.

[1] *L. Kraus*, Automobiltechn. Z. 59 (1957) S. 122.

Die Luftwiderstandszahl k_L wurde aus der Bedingung errechnet, daß der Luftwiderstand den Wert des Rollwiderstandes bei einer Fahrgeschwindigkeit von etwas über 60 km/h erreichen soll. Mit dem Rollwiderstandsbeiwert $f_R = 0{,}02$ wird dann $k_L = 0{,}09\ \mathrm{kpm^{-2}s^2}$. Die durch den Luftwiderstand bewirkte bezogene Radlaständerung wird

$$\zeta = \frac{\Delta N}{N} = \frac{2\, h_L\, k_L}{G\, l} v^2 = 0{,}26 \cdot 10^{-4}\, v^2\,,$$

worin $h_L = 0{,}5$ m die Höhe der Wirkungslinie des Luftwiderstandes über der Fahrbahn ist. Für $v = 66{,}7$ m/s, das sind 240 km/h, wird $\zeta = 0{,}155$.

Mit den oben angegebenen Werten wurden die Koeffizienten der charakteristischen Gleichung a_0 bis a_6 nach (6) errechnet, wobei a_2 bis a_5 um die Glieder infolge der Kreiselmomente a_{2k} bis a_{5k} nach (13) vergrößert wurden. Damit ist die Funktion (8) $f(i\nu) = \sum_{n=0}^{6} a_n (i\nu)^{6-n}$ festgelegt. Ihr Verlauf in der komplexen Ebene muß für $0 \leq \nu \leq \infty$ durch Bestimmung ihrer Schnittpunkte mit der reellen Achse untersucht werden. Aus dem Nullsetzen des Imaginärteils von (8) ergeben sich aus (9) die Werte von ν, bei denen $f(i\nu)$ die reelle Achse schneidet. Damit $f(i\nu)$ die Quadranten der komplexen Ebene der Reihe nach durchläuft, wie es zur Stabilität notwendig ist, muß nach (10) für den größeren Wert ν_1 der Wert $f(i\nu_1) > 0$ und für den kleineren Wert ν_2 der Wert $f(i\nu_2) < 0$ sein.

Wie sich aus der ersten Zeile von Tabelle 1 ergibt, ist das System für die zunächst gewählten Werte der Parameter unstabil. Es wurde deshalb zuerst die Drehmasse I_φ eines Vorderrades um seinen Lenkzapfen vergrößert (Zeile 2), dann außerdem die Dämpfung vergrößert (Zeile 3) und weiters zusätzlich die Drehmasse um die Längsachse I_x verringert (Zeile 4). Schließlich wurde mit dem Faktor μ noch die Drehmasse um die Hochachse vergrößert (Zeile 5) und endlich die Drehmasse um die Längsachse abermals vermindert (Zeile 6). Im Ergebnis dieser Zeile wurden erstmals sämtliche Kreiselglieder nach (13) berücksichtigt, während vorher die kleinen zweiten Glieder rechts in a_{3k} und a_{5k} weggelassen wurden. Die zweimalige Verkleinerung von I_x und die Vergrößerung von d dienen offenbar zur verstärkten Dämpfung des Wankens. Dieser Freiheitsgrad soll — nach Weglassen der Koppelglieder — nahezu aperiodisch gedämpft sein.

Tabelle 1.

I_φ kpms²	d kpms	I_x kpms²	μ (1)	ν_1^2 s^{-2}	ν_2^2 s^{-2}	$f(i\nu_1)$	$f(i\nu_2)$	Zustand
0,035	500	75	1	955	38,8	$-70{,}2 \cdot 10^4$	$-71{,}7 \cdot 10^2$	unstabil
0,070	500	75	1	469	39,9	$-12{,}6 \cdot 10^4$	$-65{,}5 \cdot 10^2$	unstabil
0,070	750	75	1	430	36,4	$-5{,}6 \cdot 10^4$	$-58{,}2 \cdot 10^2$	unstabil
0,070	750	60	1	437	35,4	$-1{,}9 \cdot 10^4$	$-57{,}7 \cdot 10^2$	unstabil
0,070	750	60	1,5	409	28,0	$-0{,}1 \cdot 10^4$	$-92{,}2 \cdot 10^2$	?
0,070	750	50	1,5	416	29,0	$+0{,}7 \cdot 10^4$	$-102 \cdot 10^2$	stabil

Man sieht, daß die Werte von mehreren Parametern erheblich geändert werden mußten, um das Fahrzeug in einen stabilen Zustand zu bringen. Die Änderung zahlreicher anderer Parameter innerhalb technisch möglicher Grenzen hatte geringen Einfluß auf die Stabilität. Andere Parameter mit starkem Einfluß, wie z. B. h, waren von vornherein mit einem recht günstigen Wert angenommen, der bei der gegebenen Art der Radaufhängung kaum verbessert werden konnte, oder waren festgelegt, wie Gewicht, Spurweite, Radstand und Höchstgeschwindigkeit.

Die Stabilität des hier behandelten linearen Ersatzsystems für den Kraftwagen gegenüber kleinen, von der Fahrbahn ausgehenden Störungen ist bei hohen Geschwindigkeiten jedenfalls nicht leicht oder u. U. auch garnicht zu erreichen. Dennoch sollte beim Entwurf eines Kraftwagens zunächst diese „lineare Lenkstabilität" angestrebt und die herkömmlichen Stabilisierungsmittel wie progressive Federung, Vorspur etc. erst zusätzlich angewendet werden.

Bei den Vorderrädern kann die Masse der nicht rotierenden Teile, wie Bremsbacken samt Lagerung, erhöht werden, um die Drehmasse I_φ des Vorderrades um seinen Lenkzapfen gegenüber der Drehmasse um den Achsschenkel I_ω zu vergrößern. Das kann wirksamer auch durch Vergrößern des Abstandes des Lenkzapfens von der Radebene geschehen. I_ω, das in allen Kreiselgliedern auftritt, soll dagegen so niedrig wie möglich gehalten werden. Durch Vergrößern von I_φ und eventuell durch Verkleinern von k wird die Nachgiebigkeit der Lenkung vermehrt und der Nachgiebigkeit der Federung angepaßt. Diese ist keine feste Größe, sondern wächst mit der auslenkenden Fliehkraft und damit mit der Fahrgeschwindigkeit. Es muß in diesem Zusammenhang erwähnt werden, daß *de Lavaud* schon anläßlich des Überganges von Hochdruck- auf Niederdruckreifen nach dem ersten Weltkrieg die Ansicht vertreten hat, daß die Einführung einer weicheren Federung eine mehr nach-

giebige Lenkung bedingt. Das ergab sich aus der Untersuchung des von ihm verwendeten Systems einer starren Vorderachse mit um die Lenkzapfen schwenkbaren rollenden Rädern und sollte auch heute bei der Einführung der hydraulischen Lenkhilfen beachtet werden. Es ist denkbar, daß eine solche Servolenkung gegenüber einer von der Fahrbahn ausgehenden Störung zu wenig elastisch ist und deshalb der Zustand des Fahrzeugs bei hohen Geschwindigkeiten unstabil wird. Eine vollständige Fixierung der Achsschenkel in der Geradeaus-Stellung gegenüber Stößen der Fahrbahn verhindert zwar alle periodischen Bewegungen des Fahrzeugs, der Lenker verliert aber das „Straßengefühl", weshalb die Korrektur der auch dann auftretenden kleinen Seitenschiebung und des Gierwinkels erst dann erfolgen kann, wenn die Kursabweichung sichtbar wird.

11. Der Momentanpol des Wankens und der Kippwinkel der Räder bei der Starrachse. Es wurde bereits erwähnt, daß bei Lastkraftwagen vielfach Starrachsen auch zur Vorderradaufhängung verwendet werden. In diesem Abschnitt sollen die Vor- und Nachteile der Starrachse für die Stabilität beschrieben werden.

Zunächst werden beim Überfahren eines einseitigen Hindernisses die Achsen beider Räder um den gleichen Winkel verschwenkt, so daß zu Beginn der Störung neben dem Stoßmoment auch ein Kreiselmoment auftritt. Ein weiterer Nachteil ist, daß bei der Trampelschwingung der Starrachse samt Rädern zwischen Hauptfedern und Luftreifen und der Lenkschwingung der Räder, die miteinander gyroskopisch gekoppelt sind, recht unangenehme Resonanzerscheinungen eintreten können. Das hat *de Lavaud* seinerzeit bewogen, die Starrachse für die Vorderräder abzulehnen, die bei Personenkraftwagen auch nicht mehr vorkommt.

Der Vorteil der Starrachse besteht vor allem darin, daß beim Durchfahren einer Kurve die Räder die Seitenneigung des Aufbaus nur im Ausmaß der Reifeneindrückung mitmachen und daß daher im Ablauf der Bewegung des gestörten Fahrzeugs die gefährlichen Kreiselmomente der Vorderräder um die Lenkzapfen klein bleiben. Außerdem liegt der Momentanpol des Wankens wesentlich höher als bei Parallelführung.

Abb. 10 zeigt den Einfluß der stark übertrieben gezeichneten Reifeneindrückung auf die Lage des Momentanpols des Wankens. Für starre Reifen wurde der Momentanpol M_0 in der Höhe der Achse angenommen ($w = r$), er kann aber noch höher liegen, wenn die eingespannten Hauptfedern biegesteif sind. Für unendlich harte Hauptfedern und elastische Luftreifen ist der Momentanpol M_∞. Für elastische Hauptfedern und Luftreifen liegt er in M.

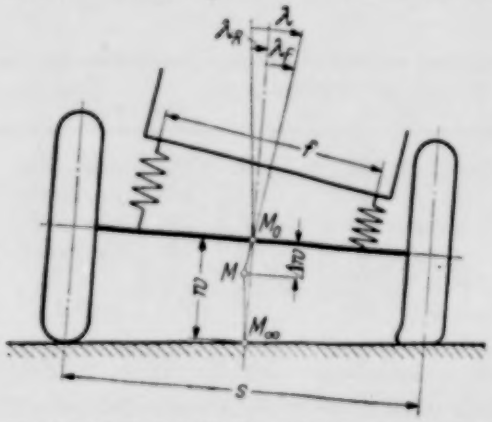


Abb. 10. Einfluß der Reifeneindrückung auf die Lage des Momentanpols des Wankens bei Starrachse.

Aus dem Sinussatz im Dreieck $M_0 M_\infty M$ folgt für kleine Winkel

$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{\lambda_R}{\lambda}. \tag{15}$$

Der Kippwinkel der Räder λ_R verhält sich zur Seitenneigung des Aufbaus λ wie die Reziprokwerte der zugehörigen Federkonstanten: $\frac{\lambda_R}{\lambda} = \frac{c_\lambda}{c_R^*}$, worin $c_R^* = c_R \left(\frac{s}{f}\right)^2$ und $c_\lambda = \frac{c_F c_R^*}{c_F + c_R^*}$ sind. Bei den üblichen Verhältnissen von c_F zu c_R und f zu s wird $\lambda_R/\lambda = 0{,}1$ bis $0{,}2$ gegenüber $\lambda_R/\lambda = 1$ bei Parallelführung. Damit sind bei Fahrzeugen mit starrer Vorderachse die Kreiselmomente der Vorderräder um ihre Lenkzapfen beim Durchfahren einer Kurve erheblich kleiner als bei Parallelführung. Dazu kommt, daß wegen der hohen Lage des Momentanpols auch der Hebelsarm der Fliehkraft kleiner wird. Für Lastkraftwagen, bei denen man meist von vornherein mit hoher Schwerpunktslage und großen Drehmassen der Räder rechnen muß, erscheint deshalb die Starrachse besonders geeignet, wenn man nicht auf höhere Fahrgeschwindigkeit verzichten will.

12. Überprüfung der Lenkstabilität eines Lastkraftwagens.[1] Für das behandelte Fahrzeug wurde ein Gewicht von 6000 kp (bei 2/3 der höchsten Nutzlast) ein Radstand $l = 3{,}1$ m, eine Spurweite $s = 1{,}6$ m und eine Höchstgeschwindigkeit $v_{max} = 80$ km/h angegeben.

Die Höhe des Schwerpunktes über der Fahrbahn wurde mit 1 m angenommen. Für die restlichen Konstanten wurden die nachstehenden Werte gewählt:

Aufbau: $I_x = 300$ kpms^2, $k_L = 0{,}975$ kpm^{-2}s^2, $h_L = 1{,}2$ m,
$\zeta = 0{,}0635$ für $v = 80$ km/h, $\mu = 1$.

[1] Die Voraussetzung, daß der Schwerpunkt in der Mitte des Radstandes liegt, ist hier nur beim unbeladenen Fahrzeug halbwegs erfüllt. Mit zunehmender Beladung verlagert sich der Schwerpunkt nach hinten und oben.

Hauptfedern und Stoßdämpfer: $c_F = 28000$ kp/m, $f = 1{,}2$ m,
$k_d = 935$ kpm^{-1}s.

Räder: $r = 0{,}46$ m, $I_w = 0{,}4$ kpms^2, $I_\varphi = 0{,}3$ kpms^2, $n = 0{,}02$ m,
$c_R = 75000$ kp/m, $k = 7500$ kp/rad.

Damit werden: $C = m/4\,k = 0{,}02$ m^{-1}s^2,
$c_R^* = 133000$ kp/m, $c_\lambda = 23300$ kp/m, $\lambda_R/\lambda = c_\lambda/c_R^* = 0{,}175$,
$\Delta w = w(\lambda_R/\lambda) = 0{,}08$ m für $w = r$, $h = 1\,m - (w - \Delta w) \approx 0{,}6$ m,
$I_0 = I_x - m\,h^2 = 84$ kpms^2, $B = 30000$ kpm, $d = 1345$ kpms.

Mit diesen Werten werden wieder die Koeffizienten der charakteristischen Gleichung a_0 bis a_6 nach (6) errechnet, worin a_3 bis a_5 um die in (13) nicht unterstrichenen Glieder aus den Kreiselmomenten a_{3k} bis a_{5k} vergrößert wurden. Aus dem Nullsetzen des Imaginärteils der Funktion (8)

$$f(i)\,v = \sum_{n=0}^{6} a_n (i\,v)^{6-n}$$

folgt mit (9)

$$v_1^2 = 344\,, \quad v_2^2 = 51{,}3$$

und mit (10)

$$f(i\,v_1) = +\,37{,}0 \cdot 10^4 > 0\,,$$
$$f(i\,v_2) = -\,388 \cdot 10^2 < 0\,.$$

Der Zustand des Fahrzeugs bei Höchstgeschwindigkeit ist demnach stabil. Wenn für die Vorderräder statt der Starrachse eine Parallelführung gewählt wird, wird bei im übrigen unveränderten Annahmen $\lambda_R/\lambda = 1$, $h = 0{,}8$ m und $I_0 = -\,84$ kpms^2. Die in diesem Fall um ein Vielfaches größeren Kreiselmomente der Räder und der größere Hebelsarm der Fliehkraft um die Wankachse bewirken Unstabilität des Fahrzeugs bei derselben Höchstgeschwindigkeit.

13. Die Vorspur der nicht angetriebenen Räder. Bei Hinterradantrieb sind die Radebenen der beiden Vorderräder nicht parallel, sondern schneiden sich in einer annähernd lotrechten Geraden, die in der Fahrtrichtung weit vor dem Fahrzeug liegt. Diese Eigenschaft nennt man Vorspur der Vorderräder. Die stabilisierende Wirkung der Vorspur hängt nun so eng mit dem Wanken des Fahrzeugs zusammen, daß sie hier kurz gezeigt werden soll. Wenn man in Abb. 11 die Reifeneindrückung vernachlässigt und die Neigung der Querlenker λ_Q der Seitenneigung λ für kleine λ proportional setzt, so bewirken die beim Wanken auftretenden Kräfte in Hauptfeder und Stoßdämpfer eine Radlaständerung

$$\Delta N = c_F\,l_F\,\lambda_Q\,(l_F/l_R) + k_d\,l_F\,\dot{\lambda}_Q\,(l_F/l_R) = (s/2)\,(c_F^*\,\lambda + k_d^*\,\dot{\lambda})\,, \quad (16)$$

worin $\lambda_Q = (s/2\,l_R)\,\lambda$, $c_F^* = c_F\,(l_F/l_R)^2$ und $k_d^* = k_d\,(l_F/l_R)^2$ ist. Der Einfluß der Kreiselmomente der Räder auf die Radlastverteilung ist in (16) nicht berücksichtigt. Die Wirkung der Vorspur besteht nun darin, daß das kurvenäußere Rad mit der größeren Radlast auch den größeren Schräglaufwinkel hat. Die Summe der Seitenkräfte der Vorderräder wird

$$S_{1a} + S_{1i} = k_0 \left\{ \left[\frac{G}{4} + \frac{s}{2}\,(c_F^*\,\lambda + k_d^*\,\dot{\lambda}) \right] \alpha_{1a} + \left[\frac{G}{4} - \frac{s}{2}\,(c_F^*\,\lambda + k_d^*\,\dot{\lambda}) \right] \alpha_{1i} \right\}$$

und mit $\alpha_{1a} = \alpha_1 + \alpha_0$, $\alpha_{1i} = \alpha_1 - \alpha_0$ (Abb. 11), sowie $k = k_0(G/4)$ kommt

$$\Sigma\,S_1 = 2\,k\,\alpha_1 + k_0\,s\,(c_F^*\,\lambda + k_d^*\,\dot{\lambda})\,\alpha_0\,. \quad (17)$$

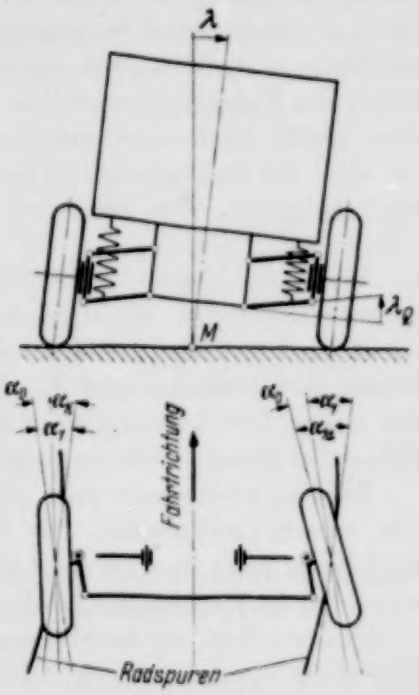


Abb. 11. Einfederung (oben) und Schräglaufwinkel (unten) der mit Vorspur versehenen Vorderräder beim Durchfahren einer Kurve.

Durch die Vorspur wird die Summe der Seitenkräfte der Vorderräder um das zweite Glied rechts in (17) vergrößert. Dieser Ausdruck muß in das System der Bewegungsgleichungen (4) eingeführt werden, wodurch alle übrigen Freiheitsgrade mit dem Wanken des Aufbaus gekoppelt werden. Die Ausrechnung der um die Vorspurglieder erweiterten Determinante (5) ergibt Ergänzungsglieder zu den Koeffizienten der charakteristischen Gleichung nach (6), vor allen zu a_1 und a_2. Der weitere Rechnungsgang mit den Koeffizienten nach (6) und (13) zeigt, daß die Vorspur die Stabilität vergrößert. Sehr wirksam ist dieses Mittel allerdings nicht, da der Winkel α_0 unter einem halben Grad bleiben muß, wenn nicht die Reifenabnützung stark zunehmen soll. Auch in anderer Beziehung

ist die Vorspur ein recht bedenkliches Stabilisierungsmittel. Ihre Wirkung beruht nämlich auf der Verschiedenheit der Radlasten der kurvenäußeren und kurveninneren Räder, die man zur Erzielung einer möglichst großen Gesamtseitenkraft in der Kurve gerne klein hält.[1] Die Vorspur wird wohl auch deshalb so häufig angewendet, weil sie vielfach am betriebsbereiten Fahrzeug in der Werkstätte leicht verändert werden kann.

Wenn die Räder nicht parallel geführt werden, kann man sie so lagern, daß die Vorspur mit der Einfederung wächst und dadurch ihre stabilisierende Wirkung stark erhöhen. Die genaue Einstellung der Räder ist in diesem Fall besonders schwierig, weil von der Belastung abhängig. Außerdem entsteht beim Durchfahren enger Kurven wegen der zu großen Vorspur des äußeren Vorderrades ein beachtlicher Kurvenwiderstand.

14. Zusammenfassung. In der vorliegenden Arbeit wurde der Kraftwagen als lineares System von vier Freiheitsgraden — seitliches Schieben, Gieren um die Hochachse, Lenkschwingung der Vorderräder und seitliches Wanken — behandelt. Dabei wurde zunächst der Schräglauf der Luftreifen, der Nachlauf der Vorderräder, die Radlaständerung durch den Luftwiderstand, die Elastizität der Hauptfedern und Luftreifen und die Dämpfung des Wankens durch Stoßdämpfer berücksichtigt. Danach wurden auch die durch das Wanken, das Gieren und die Lenkschwingung geweckten Kreiselmomente der rollenden Räder bei verschiedenen Radaufhängungen in die Rechnung einbezogen. Es zeigt sich, daß diese Kreiselmomente bei Windstille die Hauptursache einer bei hohen Geschwindigkeiten auftretenden Unstabilität des Kraftwagens sind. Schließlich wurde noch der Einfluß der Vorspur besprochen.

Die Überprüfung der Lenkstabilität von drei verschiedenen Kraftwagen an Hand des oben beschriebenen Ersatzsystems zeigt, daß alle drei bei der jeweils erreichbaren Höchstgeschwindigkeit zwar stabil sind, aber sich in der Nähe der Stabilitätsgrenze befinden. Daß dies für die meisten Kraftwagen zutrifft, läßt sich aus der weiten Verbreitung der Vorspur schließen, wobei oft die Stabilität erst durch die richtige Einstellung der Vorspur zustande kommt. Ohne zwingenden Grund würde man sonst kaum zu diesem bedenklichen Mittel greifen.

Das lineare Ersatzsystem zeigt das Stabilitätsverhalten eines Kraftwagens und läßt den Einfluß der physikalischen Größen der einzelnen Bauteile auf die Stabilität des Ganzen deutlich erkennen. Der Fehler, der durch die Vernachlässigung bestehender Nichtlinearitäten, vor allem in der Beziehung zwischen Schräglaufwinkel, Radlast und Seitenkraft entsteht, dürfte bei kleinen Schwingungen nicht allzu groß sein. Bei der praktischen Auswertung der Ergebnisse ist zu bedenken, daß man stets von einem gegebenen Aufbau samt Motor und Innenausstattung ausgehen muß. Für den Aufbau eines schnellen Fahrzeugs muß eine niedrige Schwerpunktslage, eine kleine Drehmasse um die Längsachse, eine große Drehmasse um die Hochachse, eine windschnittige Form und ein Radstand gefordert werden, der groß genug ist, um eine zu starke Entlastung der Vorderräder durch den Luftwiderstand zu verhindern. Das alles sind bereits bekannte Grundsätze für den Konstrukteur, die in der Arbeit nur bestätigt wurden.

Wenn die obigen Größen für den ausgeführten Aufbau bekannt sind, kann dazu eine Federung entworfen werden, die einen hohen Rückstellbeiwert des Wankens, eine starke Dämpfung und eine nicht zu tiefe Lage der Wankachse haben soll. Außerdem soll die Drehmasse eines Vorderrades um seinen Achsschenkel und damit der Raddurchmesser so klein sein, wie es die Reifenbeanspruchung bei hohen Geschwindigkeiten zuläßt. Schließlich sollen die Vorderräder so aufgehängt sein, daß sie schon bei kleinen Schwingungen die Seitenneigung des Aufbaus nicht voll mitmachen.

Zuletzt wählt man noch die Kenngrößen der Lenkung, d. s. die Drehmassen eines Vorderrades um seinen Lenkzapfen, den Nachlauf der Vorderräder und die Seitensteifigkeit eines Luftreifens und kann jetzt den Zustand des ganzen Systems berechnen. Ergibt sich Instabilität, so wird man zunächst die Größen der Lenkung — innerhalb technisch möglicher Grenzen — in einem die Stabilität fördernden Sinn zu ändern suchen. Wenn das nicht ausreicht, können auch noch die Größen der Federung — z. B. durch Annahme einer Zusatzfederung — verbessert werden. Die Kenngrößen des Aufbaus, die nur am ausgeführten Stück verläßlich gemessen werden können, dürfen dagegen nicht variiert werden.

In der vorangegangenen und in dieser Arbeit wurde versucht, den modernen Verfahren zur Stabilitätsbestimmung das Gebiet des Automobilbaues zu erschließen, auf dem von Beginn an hauptsächlich empirisch vorgegangen wurde.

(Eingegangen am 2. Juni 1959.)

Anschrift des Verfassers: Dr. *Gert Mitterlehner*, Wien II, Halmgasse 1 (Österreich).

[1] *H. Scherenberg*, Automobiltechn. Ztschr. 57 (1955) S. 155.

Eine Verallgemeinerung des Prinzips vom Minimum der potentiellen Energie zweidimensionaler elastischer Kontinua

Von D. Rüdiger

1. Einleitung. In der vorliegenden Arbeit werden die Gedanken, die zu einer Verallgemeinerung des Prinzips vom Minimum der potentiellen Energie elastischer Körper führen[1], auf zweidimensionale elastische Kontinua übertragen. Die durch Einführung der Randersatzkraft entstehenden Schwierigkeiten kann man durch Aufteilen der Randkurve C in differentiierbare Kurvenstücke beheben. Da Randbedingungen des Variationsproblems nicht auftreten, sind für beliebige Randwertaufgaben der Schalen-, Platten- und Scheibentheorie die Verfahren von *W. Ritz* und *E. Trefftz* hinsichtlich der zu verwendenden Funktionen ohne Einschränkungen anwendbar.

Zur Ableitung des Variationsprinzips werden die Grundgleichungen der technischen Schalentheorie[2] in allgemeinen Koordinaten

$$\left.\begin{aligned} N^{\alpha\beta}|_\alpha + p^\beta &= 0\,, \\ Q^\alpha|_\alpha + b_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} + p^3 &= 0\,, \\ M^{\alpha\beta}|_\alpha - Q^\beta &= 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{1$_1$}$$

$$\left.\begin{aligned} N^{\alpha\beta} &= \frac{E\,h}{1-\nu^2}\,(D^{\alpha\beta} + \nu\,\varepsilon^{\alpha\gamma}\,\varepsilon^{\beta\delta}\,D_{\gamma\delta})\,, \\ M^{\alpha\beta} &= -\frac{E\,h}{1-\nu^2}\,\frac{h^2}{12}\,(W|^{\alpha\beta} + \nu\,\varepsilon^{\alpha\gamma}\,\varepsilon^{\beta\delta}\,W|_{\gamma\delta}) \end{aligned}\right\} \tag{1$_2$}$$

verwendet. In (1_1) unf (1_2) stellen $N^{\alpha\beta}$ den Längskrafttensor, $M^{\alpha\beta}$ den Momententensor, Q^α den Querkraftvektor, p^α, p^3 den Vektor der Flächenbelastungen,

$$D^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,(V^\alpha|^\beta + V^\beta|^\alpha) - b^{\alpha\beta}\,W \tag{1$_3$}$$

den Deformationstensor der Schalenmittelfläche, V^α, W den Verschiebungsvektor und $b_{\alpha\beta}$ die Koeffizienten der zweiten Fundamentalform der Flächentheorie dar. Sind diese Null, so zerfallen die Schalengrundgleichungen (1_1) und (1_2) in die Grundgleichungen der Plattentheorie

$$\left.\begin{aligned} Q^\alpha|_\alpha + p^3 &= 0\,, \\ M^{\alpha\beta}|_\alpha - Q^\beta &= 0\,, \\ M^{\alpha\beta} &= -\frac{E\,h}{1-\nu^2}\,\frac{h^2}{12}\,(W|^{\alpha\beta} + \nu\,\varepsilon^{\alpha\gamma}\,\varepsilon^{\beta\delta}\,W|_{\gamma\delta}) \end{aligned}\right\} \tag{2$_1$}$$

und in die der Scheibentheorie

$$\left.\begin{aligned} N^{\alpha\beta}|_\alpha + p^\beta &= 0\,, \\ D^{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\,(V^\alpha|^\beta + V^\beta|^\alpha)\,, \\ N^{\alpha\beta} &= \frac{E\,h}{1-\nu^2}\,(D^{\alpha\beta} + \nu\,\varepsilon^{\alpha\gamma}\,\varepsilon^{\beta\delta}\,D_{\gamma\delta})\,. \end{aligned}\right\} \tag{2$_2$}$$

Legt man den Tangentenvektor der Randkurve C durch e^α, ihren Normalenvektor durch $n_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\,e^\beta$ fest, dann ist die am Schalenrand angreifende Längskraft mit der Randnormalkraft $N = n_\alpha\,n_\beta\,N^{\alpha\beta}$ und der Randschubkraft $S = e_\alpha\,n_\beta\,N^{\alpha\beta}$ durch

$$K^\beta = n_\alpha\,N^{\alpha\beta} = N\,n^\beta + S\,e^\beta\,, \tag{3$_1$}$$

der am Schalenrand angreifende Momentenvektor mit dem Randbiegemoment $B = n_\alpha\,n_\beta\,M^{\alpha\beta}$ und dem Randtorsionsmoment $T = -\,n_\alpha\,e_\beta\,M^{\alpha\beta}$ durch

$$M^\beta = \varepsilon^{\alpha\beta}\,n^\gamma\,M_{\alpha\gamma} = B\,e^\beta + T\,n^\beta \tag{3$_2$}$$

gegeben[3]. Für die Randquerkraft gilt

$$Q = n_\alpha\,Q^\alpha\,. \tag{3$_3$}$$

---

[1] *D. Rüdiger*, Ing.-Arch. 27 (1960), S. 421.
[2] Vgl. z. B. *D. Rüdiger*, Festschrift *Richard Grammel*. Ing.-Arch. 28 (1959), S. 281.
[3] *H. Neuber*, Z. angew. Math. Mech. 29 (1949), S. 144.

2. Das Variationsprinzip. Eine elastische Schale mit der Fläche F unterliege den Flächenbelastungen p^α, p^3 und sei beliebigen Randbedingungen unterworfen. Dabei sollen an den Randstücken $\overset{1}{c}$, $\overset{2}{c}$, $\overset{3}{c}$ und $\overset{4}{c}$ die Randnormalkraft N, die Randschubkraft S, die Randersatzkraft $Q^* = Q - \partial T/\partial s$ und das Randbiegemoment B gegeben sein, während an den Randstücken $\overset{1}{\overline{c}}$, $\overset{2}{\overline{c}}$, $\overset{3}{\overline{c}}$ und $\overset{4}{\overline{c}}$ die Randverschiebungen $n^\alpha V_\alpha$, $e^\alpha V_\alpha$, W und die Randverdrehung $n^\alpha W|_\alpha$ vorgeschrieben sind. Es ist dann $C = \overset{1}{c} + \overset{1}{\overline{c}}$, $C = \overset{2}{c} + \overset{2}{\overline{c}}$, $C = \overset{3}{c} + \overset{3}{\overline{c}}$ und $C = \overset{4}{c} + \overset{4}{\overline{c}}$.

Die Ableitung des Variationsprinzips erfolgt mit der Formänderungsarbeit $-\delta\Pi$ der im Gleichgewicht befindlichen Schale bei dem Verschiebungszustand δV^α, δW. Diese ist mit dem Flächenelement df der Schalenmittelfläche

$$-\delta\Pi = \iint_F (N^{\alpha\beta}|_\alpha + p^\beta)\,\delta V_\beta\,df + \iint_F (Q^\alpha|_\alpha + b_{\alpha\beta}\,N^{\alpha\beta} + p^3)\,\delta W\,df + \\ + \iint_F (-M^{\alpha\beta}|_\alpha + Q^\beta)\,\delta W|_\beta\,df = 0\,. \tag{4$_1$}$$

Führt man in (4$_1$) die Identitäten

$$N^{\alpha\beta}|_\alpha\,\delta V_\beta = (N^{\alpha\beta}\,\delta V_\beta)|_\alpha - N^{\alpha\beta}\,\delta V_\beta|_\alpha\,,$$
$$Q^\alpha|_\alpha\,\delta W = (Q^\alpha\,\delta W)|_\alpha - Q^\alpha\,\delta W|_\alpha\,,$$
$$M^{\alpha\beta}|_\alpha\,\delta W|_\beta = (M^{\alpha\beta}\,\delta W|_\beta)|_\alpha - M^{\alpha\beta}\,\delta W|_{\beta\alpha}$$

ein, dann ergibt sich bei Beachtung von

$$\delta D_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,(\delta V_\alpha|_\beta + \delta V_\beta|_\alpha) - b_{\alpha\beta}\,\delta W$$

die potentielle Energie $\delta\Pi$ zu

$$\delta\Pi = \iint_F N^{\alpha\beta}\,\delta D_{\alpha\beta}\,df - \iint_F M^{\alpha\beta}\,\delta W|_{\beta\alpha}\,df - \\ - \iint_F (N^{\alpha\beta}\,\delta V_\beta)|_\alpha\,df + \iint_F (M^{\alpha\beta}\,\delta W|_\beta)|_\alpha\,df - \iint_F (Q^\alpha\,\delta W)|_\alpha\,df - \\ - \iint_F (p^\alpha\,\delta V_\alpha + p^3\,\delta W)\,df = 0\,. \tag{4$_2$}$$

Für die beiden ersten Flächenintegrale in (4$_2$) kann mit dem Elastizitätsgesetz (1$_2$)

$$\iint_F N^{\alpha\beta}\,\delta D_{\alpha\beta}\,df - \iint_F M^{\alpha\beta}\,\delta W|_{\beta\alpha}\,df$$
$$= \iint_F \frac{E\,h}{1-\nu^2}\,(D^{\alpha\beta}\,\delta D_{\alpha\beta} + \nu\,\varepsilon^{\alpha\gamma}\,\varepsilon^{\beta\delta}\,D_{\gamma\delta}\,\delta D_{\alpha\beta})\,df - \\ - \iint_F -\frac{E\,h}{1-\nu^2}\,\frac{h^2}{12}\,(W|^{\alpha\beta}\,\delta W|_{\beta\alpha} + \nu\,\varepsilon^{\alpha\gamma}\,\varepsilon^{\beta\delta}\,W|_{\gamma\delta}\,\delta W|_{\beta\alpha})\,df$$
$$= \frac{1}{2}\iint_F \frac{E\,h}{1-\nu^2}\,[\delta\,(D^{\alpha\beta}\,D_{\alpha\beta} + \nu\,\varepsilon^{\alpha\gamma}\,\varepsilon^{\beta\delta}\,D_{\gamma\delta}\,D_{\alpha\beta})]\,df - \\ - \frac{1}{2}\iint_F -\frac{E\,h}{1-\nu^2}\,\frac{h^2}{12}\,[\delta\,(W|^{\alpha\beta}\,W|_{\alpha\beta} + \nu\,\varepsilon^{\alpha\gamma}\,\varepsilon^{\beta\delta}\,W|_{\gamma\delta}\,W|_{\beta\alpha})]\,df$$
$$= \frac{1}{2}\iint_F \delta(N^{\alpha\beta}\,D_{\alpha\beta})\,df - \frac{1}{2}\iint_F \delta(M^{\alpha\beta}\,W|_{\alpha\beta})\,df$$

geschrieben werden. Beachtet man noch die wegen (1$_1$) gültigen Beziehungen

$$N^{\alpha\beta}\,D_{\alpha\beta} = (N^{\alpha\beta}\,V_\alpha)|_\beta + p^\alpha\,V_\alpha - b_{\alpha\beta}\,N^{\alpha\beta}\,W\,,$$
$$-M^{\alpha\beta}\,W|_{\alpha\beta} = -(M^{\alpha\beta}\,W|_\alpha)|_\beta + (Q^\alpha\,W)|_\alpha + b_{\alpha\beta}\,N^{\alpha\beta}\,W + p^3\,W\,,$$

so folgt schließlich

$$\iint_F N^{\alpha\beta}\,\delta D_{\alpha\beta}\,df - \iint_F M^{\alpha\beta}\,\delta W|_{\beta\alpha}\,df = \frac{1}{2}\iint_F \delta(N^{\alpha\beta}\,V_\alpha)|_\beta\,df - \\ - \frac{1}{2}\iint_F \delta(M^{\alpha\beta}\,W|_\alpha)|_\beta\,df + \frac{1}{2}\iint_F \delta(Q^\alpha\,W)|_\alpha\,df + \frac{1}{2}\iint_F \delta(p^\alpha\,V_\alpha + p^3\,W)\,df\,.$$

Damit erhält man für die potentielle Energie

$$\delta H = \frac{1}{2}\iint_F \delta(N^{\alpha\beta}\, V_\alpha)|_\beta \, df - \frac{1}{2}\iint_F \delta(M^{\alpha\beta}\, W|_\alpha)|_\beta \, df + \frac{1}{2}\iint_F \delta(Q^\alpha\, W)|_\alpha \, df -$$
$$- \iint_F (N^{\alpha\beta}\, \delta V_\beta)|_\alpha \, df + \iint_F (M^{\alpha\beta}\, \delta W|_\beta)|_\alpha \, df - \iint_F (Q^\alpha\, \delta W)|_\alpha \, df +$$
$$+ \frac{1}{2}\iint_F \delta\,(p^\alpha\, V_\alpha + p^3\, W)\, df - \iint_F (p^\alpha\, \delta V_\alpha + p^3\, \delta W)\, df = 0\,. \qquad (4_3)$$

Die Anwendung des *Gauß*schen Integralsatzes

$$\iint_F (\,)|_\alpha \, df = \oint_C (\,)\, n_\alpha \, ds$$

auf die ersten sechs Integrale in (4_3) ergibt

$$\delta H = \frac{1}{2}\oint_C \delta(N^{\alpha\beta}\, V_\alpha)\, n_\beta \, ds - \frac{1}{2}\oint_C \delta(M^{\alpha\beta}\, W|_\alpha)\, n_\beta \, ds + \frac{1}{2}\oint_C \delta(Q^\alpha\, W)\, n_\alpha \, ds -$$
$$- \oint_C N^{\alpha\beta}\, \delta V_\beta\, n_\alpha \, ds + \oint_C M^{\alpha\beta}\, \delta W|_\beta\, n_\alpha \, ds - \oint_C Q^\alpha\, \delta W\, n_\alpha \, ds +$$
$$+ \frac{1}{2}\iint_F \delta\,(p^\alpha\, V_\alpha + p^3\, W)\, df - \iint_F (p^\alpha\, \delta V_\alpha + p^3\, \delta W)\, df = 0\,,$$

und nach Einführung der Randkräfte und Randmomente (3) wird

$$\delta H = \frac{1}{2}\oint_C \delta(N\, n^\alpha\, V_\alpha)\, ds + \frac{1}{2}\oint_C \delta(S\, e^\alpha\, V_\alpha)\, ds +$$
$$+ \frac{1}{2}\oint_C \delta(Q\, W)\, ds + \frac{1}{2}\oint_C \delta(T\, e^\alpha\, W|_\alpha)\, ds - \frac{1}{2}\oint_C \delta(B\, n^\alpha\, W|_\alpha)\, ds -$$
$$- \oint_C N\, n^\alpha\, \delta V_\alpha \, ds - \oint_C S\, e^\alpha\, \delta V_\alpha \, ds -$$
$$- \oint_C Q\, \delta W \, ds - \oint_C T\, e^\alpha\, \delta W|_\alpha \, ds + \oint_C B\, n^\alpha\, \delta W|_\alpha \, ds +$$
$$+ \frac{1}{2}\iint_F \delta\,(p^\alpha\, V_\alpha + p^3\, W)\, df - \iint_F (p^\alpha\, \delta V_\alpha + p^3\, \delta W)\, df = 0\,. \qquad (4_4)$$

Ersetzt man noch die Randintegrale in (4_4) durch die Linienintegrale längs $\frac{1}{c}$, $\frac{2}{c}$, $\frac{3}{c}$, $\frac{4}{c}$ und $\frac{\bar{1}}{c}$, $\frac{\bar{2}}{c}$, $\frac{\bar{3}}{c}$, $\frac{\bar{4}}{c}$, so folgt

$$\delta H = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{c}} \delta(N\, n^\alpha\, V_\alpha)\, ds + \frac{1}{2}\int_{\frac{\bar{1}}{c}} \delta(N\, n^\alpha\, V_\alpha)\, ds + \frac{1}{2}\int_{\frac{2}{c}} \delta(S\, e^\alpha\, V_\alpha)\, ds + \frac{1}{2}\int_{\frac{\bar{2}}{c}} \delta(S\, e^\alpha\, V_\alpha)\, ds +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_{\frac{3}{c}} \delta(Q\, W + T\, e^\alpha\, W|_\alpha)\, ds + \frac{1}{2}\int_{\frac{\bar{3}}{c}} \delta(Q\, W + T\, e^\alpha\, W|_\alpha)\, ds -$$
$$- \frac{1}{2}\int_{\frac{4}{c}} \delta(B\, n^\alpha\, W|_\alpha)\, ds - \frac{1}{2}\int_{\frac{\bar{4}}{c}} \delta(B\, n^\alpha\, W|_\alpha)\, ds -$$
$$- \int_{\frac{1}{c}} N\, \delta(n^\alpha\, V_\alpha)\, ds - \int_{\frac{\bar{1}}{c}} N\, \delta(n^\alpha\, V_\alpha)\, ds - \int_{\frac{2}{c}} S\, \delta(e^\alpha\, V_\alpha)\, ds - \int_{\frac{\bar{2}}{c}} S\, \delta(e^\alpha\, V_\alpha)\, ds -$$
$$- \int_{\frac{3}{c}} [Q\, \delta W + T\, \delta(e^\alpha\, W|_\alpha)]\, ds - \int_{\frac{\bar{3}}{c}} [Q\, \delta W + T\, \delta(e^\alpha\, W|_\alpha)]\, ds +$$

$$+\int\limits_{\frac{4}{c}}^{\cdot} B\,\delta(n^\alpha\,W|_\alpha)\,ds+\int\limits_{\frac{4}{c}}^{\cdot} B\,\delta(n^\alpha\,W|_\alpha)\,ds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_F\int \delta(p^\alpha\,V_\alpha+p^3\,W)\,df-\int_F\int (p^\alpha\,\delta V_\alpha+p^3\,\delta W)\,df=0\,. \qquad (4_5)$$

Die Linienintegrale, die das Randtorsionsmoment enthalten, werden durch partielle Integration umgeformt. Man erhält auf einem Randstück zwischen zwei Punkten *1* und *2*

$$\int_1^2 T\,e^\alpha\,W|_\alpha\,ds=[T\,W]_1^2-\int_1^2\frac{\partial T}{\partial s}\,W\,ds\,,$$

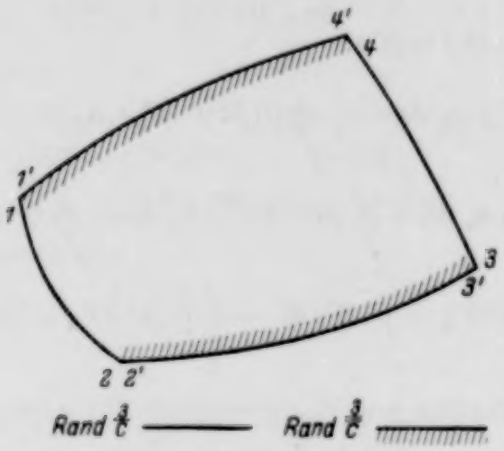


Abb. 1. Aufteilung des Randes.

so daß zum Beispiel für eine Schale bzw. Platte mit den vier vorgegebenen Randstücken entsprechend Abb. 1

$$\delta\Pi=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{c}}^{\cdot}\delta(N\,n^\alpha\,V_\alpha)\,ds+\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{c}}^{\cdot}\delta(N\,n^\alpha\,V_\alpha)\,ds+\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{2}{c}}^{\cdot}\delta(S\,e^\alpha\,V_\alpha)\,ds+\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{2}{c}}^{\cdot}\delta(S\,e^\alpha\,V_\alpha)\,ds+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{3}{c}}^{\cdot}\delta(Q^*\,W)\,ds+\frac{1}{2}\,\delta[T\,W]_1^2+\frac{1}{2}\,\delta[T\,W]_3^4+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{3}{c}}^{\cdot}\delta(Q^*\,W)\,ds+\frac{1}{2}\,\delta[T\,W]_{2'}^{3'}+\frac{1}{2}\,\delta[T\,W]_{4'}^{1'}-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{4}{c}}^{\cdot}\delta(B\,n^\alpha\,W|_\alpha)\,ds-\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{4}{c}}^{\cdot}\delta(B\,n^\alpha\,W|_\alpha)\,ds-$$

$$-\int\limits_{\frac{1}{c}}^{\cdot}N\,\delta(n^\alpha\,V_\alpha)\,ds-\int\limits_{\frac{1}{c}}^{\cdot}N\,\delta(n^\alpha\,V_\alpha)\,ds-\int\limits_{\frac{2}{c}}^{\cdot}S\,\delta(e^\alpha\,V_\alpha)\,ds-\int\limits_{\frac{2}{c}}^{\cdot}S\,\delta(e^\alpha\,V_\alpha)\,ds-$$

$$-\int\limits_{\frac{3}{c}}^{\cdot}Q^*\,\delta W\,ds-[T\,\delta W]_1^2-[T\,\delta W]_3^4-$$

$$-\int\limits_{\frac{3}{c}}^{\cdot}Q^*\,\delta W\,ds-[T\,\delta W]_{2'}^{3'}-[T\,\delta W]_{4'}^{1'}+$$

$$+\int\limits_{\frac{4}{c}}^{\cdot}B\,\delta(n^\alpha\,W|_\alpha)\,ds+\int\limits_{\frac{4}{c}}^{\cdot}B\,\delta(n^\alpha\,W|_\alpha)\,ds+$$

$$+\frac{1}{2}\int_F\int\delta\,(p^\alpha\,V_\alpha+p^3\,W)\,df-\int_F\int(p^\alpha\,\delta V_\alpha+p^3\,\delta W)\,df=0 \qquad (4_6)$$

geschrieben werden kann. Führt man in (4_6) die Identitäten

$$
\begin{aligned}
-N\,\delta(n^\alpha V_\alpha) &= -\delta(N\,n^\alpha V_\alpha) + \delta N\,n^\alpha V_\alpha\,,\\
-S\,\delta(e^\alpha V_\alpha) &= -\delta(S e^\alpha V_\alpha) + \delta S\,e^\alpha V_\alpha\,,\\
-Q^*\,\delta W &= -\delta(Q^*\,W) + \delta Q^*\,W\,,\\
-T\,\delta W &= -\delta(T\,W) + \delta T\,W\,,\\
B\,\delta(n^\alpha W|_\alpha) &= \delta(B\,n^\alpha W|_\alpha) - \delta B\,n^\alpha W|_\alpha
\end{aligned}
$$

ein, dann wird zunächst

$$
\begin{aligned}
\delta\Pi = {} & \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{c}} \delta(N\,n^\alpha V_\alpha)\,ds + \frac{1}{2}\int_{\frac{2}{c}} \delta(S\,e^\alpha V_\alpha)\,ds + \frac{1}{2}\int_{\frac{3}{c}} \delta(Q^*\,W)\,ds + \\
& + \frac{1}{2}\,\delta[T\,W]_1^2 + \frac{1}{2}\,\delta[T\,W]_3^4 \qquad - \frac{1}{2}\int_{\frac{4}{c}} \delta(B\,n^\alpha W|_\alpha)\,ds + \\
& + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{c}} \delta(N\,n^\alpha V_\alpha)\,ds + \frac{1}{2}\int_{\frac{2}{c}} \delta(S\,e^\alpha V_\alpha)\,ds + \frac{1}{2}\int_{\frac{3}{c}} \delta(Q^*\,W)\,ds + \\
& + \frac{1}{2}\,\delta[T\,W]_{2'}^{3'} + \frac{1}{2}\,\delta[T\,W]_{4'}^{1'} \qquad - \frac{1}{2}\int_{\frac{4}{c}} \delta(B\,n^\alpha W|_\alpha)\,ds - \\
& - \int_{\frac{1}{c}} N\,\delta(n^\alpha V_\alpha)\,ds - \int_{\frac{2}{c}} S\,\delta(e^\alpha V_\alpha)\,ds \qquad - \int_{\frac{3}{c}} Q^*\,\delta W\,ds - \\
& - \delta[T\,W]_1^2 - \delta[T\,W]_3^4 \qquad + \int_{\frac{4}{c}} B\,\delta(n^\alpha W|_\alpha)\,ds + \\
& + [\delta T\,W]_1^2 + [\delta T\,W]_3^4 - \\
& - \int_{\frac{1}{c}} \delta(N\,n^\alpha V_\alpha)\,ds - \int_{\frac{2}{c}} \delta(S\,e^\alpha V_\alpha)\,ds \qquad - \int_{\frac{3}{c}} \delta(Q^*\,W)\,ds + \\
& + \int_{\frac{1}{c}} \delta N\,n^\alpha V_\alpha\,ds + \int_{\frac{2}{c}} \delta S\,e^\alpha V_\alpha\,ds \qquad + \int_{\frac{3}{c}} \delta Q^*\,W\,ds - \\
& - \delta[T\,W]_{2'}^{3'} - \delta[T\,W]_{4'}^{1'} \qquad + \int_{\frac{4}{c}} \delta(B\,n^\alpha W|_\alpha)\,ds + \\
& + [\delta T\,W]_{2'}^{3'} + [\delta T\,W]_{4'}^{1'} \qquad - \int_{\frac{4}{c}} \delta B\,n^\alpha W|_\alpha\,ds + \\
& + \frac{1}{2}\int_F\int \delta\,(p^\alpha V_\alpha + p^3\,W)\,df - \int_F\int (p^\alpha\,\delta V_\alpha + p^3\,\delta W)\,df = 0
\end{aligned}
$$

und nach Zusammenfassung

$$\delta II = \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{c}} \delta(N\, n^\alpha\, V_\alpha)\, ds + \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{2}{c}} \delta(S\, e^\alpha\, V_\alpha)\, ds + \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{3}{c}} \delta(Q^*\, W)\, ds -$$

$$- \frac{1}{2}\,\delta[T\,W]_1^2 - \frac{1}{2}\,\delta[T\,W]_3^4 - \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{4}{c}} \delta(B\, n^\alpha\, W|_\alpha)\, ds -$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{c}} \delta(N\, n^\alpha\, V_\alpha)\, ds - \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{2}{c}} \delta(S\, e^\alpha\, V_\alpha)\, ds - \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{3}{c}} \delta(Q^*\, W)\, ds -$$

$$- \frac{1}{2}\,\delta[T\,W]_{2'}^{3'} - \frac{1}{2}\,\delta[T\,W]_{4'}^{1'} + \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{4}{c}} \delta(B\, n^\alpha\, W|_\alpha)\, ds -$$

$$- \int\limits_{\frac{1}{c}} N\,\delta(n^\alpha\, V_\alpha)\, ds - \int\limits_{\frac{2}{c}} S\,\delta(e^\alpha\, V_\alpha)\, ds - \int\limits_{\frac{3}{c}} Q^*\,\delta W\, ds +$$

$$+ [\delta T\, W]_1^2 + [\delta T\, W]_3^4 + \int\limits_{\frac{4}{c}} B\,\delta(n^\alpha\, W|_\alpha)\, ds +$$

$$+ \int\limits_{\frac{1}{c}} \delta N\, n^\alpha\, V_\alpha\, ds + \int\limits_{\frac{2}{c}} \delta S\, e^\alpha\, V_\alpha\, ds + \int\limits_{\frac{3}{c}} \delta Q^*\, W\, ds +$$

$$+ [\delta T\, W]_{2'}^{3'} + [\delta T\, W]_{4'}^{1'} - \int\limits_{\frac{4}{c}} \delta B\, n^\alpha\, W|_\alpha\, ds +$$

$$+ \frac{1}{2}\iint\limits_{F'} \delta\,(p^\alpha\, V_\alpha + p^3\, W)\, df - \iint\limits_{F'} (p^\alpha\,\delta V_\alpha + p^3\,\delta W)\, df = 0\,. \qquad (5)$$

Die Beziehung (5) ist die modifizierte Energiehauptformel, aus der sich sofort das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie zweidimensionaler elastischer Kontinua ableiten läßt. Da nämlich in den Randstücken $\frac{1}{c}$, $\frac{2}{c}$, $\frac{3}{c}$ und $\frac{4}{c}$ die Randkräfte $\bar{N}$, $\bar{S}$, $\bar{Q}^*$ und das Randmoment $\bar{B}$, in den Randstücken $\frac{1}{\bar{c}}$, $\frac{2}{\bar{c}}$, $\frac{3}{\bar{c}}$ und $\frac{4}{\bar{c}}$ die Randverschiebungen $n^\alpha\,\bar{V}_\alpha$, $e^\alpha\,\bar{V}_\alpha$, $\bar{W}$ und die Randverdrehung $n^\alpha\,\bar{\bar{W}}|_\alpha$, in den Randpunkten *1*, *2*, *3*, *4* die Verschiebung $\bar{\bar{W}}$ und auf der gesamten Oberfläche die Flächenkräfte $\bar{p}^\alpha$, $\bar{p}^3$ fest vorgegeben sind, gilt

$$\delta II = \delta\Bigg[\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{c}} N\, n^\alpha\, V_\alpha\, ds + \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{2}{c}} S\, e^\alpha\, V_\alpha\, ds + \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{3}{c}} Q^*\, W\, ds - \frac{1}{2}\,[T\,W]_1^2 - \frac{1}{2}\,[T\,W]_3^4 - \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{4}{c}} B\, n^\alpha\, W|_\alpha\, ds -$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{c}} N\, n^\alpha\, V_\alpha\, ds - \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{2}{c}} S\, e^\alpha\, V_\alpha\, ds - \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{3}{c}} Q^*\, W\, ds - \frac{1}{2}\,[TW]_{2'}^{3'} - \frac{1}{2}\,[T\,W]_{4'}^{1'} + \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{4}{c}} B\, n^\alpha\, W|_\alpha\, ds -$$

$$- \int\limits_{\frac{1}{c}} \bar{N}\, n^\alpha\, V_\alpha\, ds - \int\limits_{\frac{2}{c}} \bar{S}\, e^\alpha\, V_\alpha\, ds - \int\limits_{\frac{3}{c}} \bar{Q}^*\, W\, ds + [T\,\bar{W}]_1^2 + [T\,\bar{W}]_3^4 + \int\limits_{\frac{4}{c}} \bar{B}\, n^\alpha\, W|_\alpha\, ds +$$

$$+ \int\limits_{\frac{1}{c}} N\, n^\alpha\, \bar{V}_\alpha\, ds + \int\limits_{\frac{2}{c}} S\, e^\alpha\, \bar{V}_\alpha\, ds + \int\limits_{\frac{3}{c}} Q^*\, \bar{W}\, ds + [T\,\bar{W}]_{2'}^{3'} + [T\,W]_{4'}^{1'} - \int\limits_{\frac{4}{c}} B\, n^\alpha\, \bar{\bar{W}}|_\alpha\, ds +$$

$$+ \frac{1}{2}\iint\limits_{F'} (p^\alpha\, V_\alpha + p^3\, W)\, df - \iint\limits_{F'} (\bar{p}^\alpha\, V_\alpha + \bar{p}^3\, W)\, df\Bigg] = 0\,.$$

Hieraus ergibt sich, daß unter allen möglichen Verschiebungen eines zweidimensionalen elastischen Kontinuums, die in allen Randpunkten beliebige Werte annehmen können, diejenigen eintreten, die den Ausdruck

$$\begin{aligned}\Pi = {} & \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{c}} (N - 2\bar{N})\, n^\alpha V_\alpha\, ds + \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{2}{c}} (S - 2\bar{S})\, e^\alpha V_\alpha\, ds + \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{3}{c}} (Q^\bullet - 2\bar{Q}^\bullet)\, W\, ds - \\ & - \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{4}{c}} (B - 2\bar{B})\, n^\alpha W|_\alpha\, ds - \frac{1}{2}[T(W - 2\bar{W})]_1^2 - \frac{1}{2}[T(W - 2\bar{W})]_3^4 - \\ & - \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{1}{c}} N n^\alpha (V_\alpha - 2\bar{V}_\alpha)\, ds - \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{2}{c}} S e^\alpha (V_\alpha - 2\bar{V}_\alpha)\, ds - \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{3}{c}} Q^\bullet (W - 2\bar{W})\, ds + \\ & + \frac{1}{2}\int\limits_{\frac{4}{c}} B n^\alpha (W|_\alpha - 2\bar{W}|_\alpha) - \frac{1}{2}[T(W - 2\bar{W})]_{2'}^{3'} - \frac{1}{2}[T(W - 2\bar{W})]_{4'}^{1'} + \\ & + \frac{1}{2}\int_F\int [(p^\alpha - 2\bar{p}^\alpha) V_\alpha + (p^3 - 2\bar{p}^3) W]\, df \end{aligned} \tag{6}$$

zu einem Extremum werden lassen. Das Extremalprinzip (6) hat gegenüber der klassischen Formulierung den Vorteil, daß an die infinitesimal benachbarten Systeme von Verschiebungen hinsichtlich der Randbedingungen keine Forderungen gestellt zu werden brauchen. Man kann also zur numerischen Darstellung der Lösung $V^\alpha = V^\alpha(x^1, x^2)$, $W = W(x^1, x^2)$ eines vorgegebenen Randwertproblems der Schalen-, Platten- und Scheibentheorie im Sinne von *W. Ritz* einen Ansatz

$$\overset{n}{V}{}^\alpha = \sum_{\nu=1}^{n} \overset{\nu,\alpha}{c}\, \overset{\nu}{\varphi}{}^\alpha, \qquad \overset{n}{W} = \sum_{\nu=1}^{n} \overset{\nu}{c}\, \overset{\nu}{\omega} \tag{7$_1$}$$

mit willkürlichen Funktionen $\overset{\nu}{\varphi}{}^\alpha$, $\overset{\nu}{\omega}$ machen. Die Funktionen sind dabei nur so allgemein auszuwählen, daß bei hinreichend großem n und passend gewählten Koeffizienten $\overset{\nu,\alpha}{c}$, $\overset{\nu}{c}$ die Lösung der vorgegebenen Randwertaufgabe mit beliebiger Genauigkeit dargestellt werden kann.

Das System von Verschiebungen (7_1) liefert für den Deformationstensor, den Längskrafttensor und den Momententensor

$$\left.\begin{aligned} \overset{n}{D}{}^{\alpha\beta} &= \sum_{\nu=1}^{n}\left[\frac{1}{2}\left(\overset{\nu,\alpha}{c}\, \overset{\nu}{\varphi}{}^\alpha|_\beta + \overset{\nu,\beta}{c}\, \overset{\nu}{\varphi}{}^\beta|_\alpha\right) - b^{\alpha\beta}\, \overset{\nu}{c}\, \overset{\nu}{\omega}\right], \\ \overset{n}{N}{}^{\alpha\beta} &= \frac{E h}{1-\nu^2}\left(\overset{n}{D}{}^{\alpha\beta} + \nu\, \varepsilon^{\alpha\gamma}\, \varepsilon^{\beta\delta}\, \overset{n}{D}_{\gamma\delta}\right), \\ \overset{n}{M}{}^{\alpha\beta} &= -\frac{E h}{1-\nu^2}\frac{h^2}{12}\left(\overset{n}{W}|^{\alpha\beta} + \nu\, \varepsilon^{\alpha\gamma}\, \varepsilon^{\beta\delta}\, \overset{n}{W}|_{\gamma\delta}\right) \end{aligned}\right\} \tag{7$_2$}$$

und für die Randkräfte, Randmomente und Flächenbelastungen

$$\left.\begin{aligned} \overset{n}{N} &= n_\alpha\, n_\beta\, \overset{n}{N}{}^{\alpha\beta}, \\ \overset{n}{S} &= n_\alpha\, e_\beta\, \overset{n}{N}{}^{\alpha\beta}, \\ \overset{n}{B} &= n_\alpha\, n_\beta\, \overset{n}{M}{}^{\alpha\beta}, \\ \overset{n}{T} &= -\, n_\alpha\, e_\beta\, \overset{n}{M}{}^{\alpha\beta}, \\ \overset{n}{Q} &= n_\beta\, \overset{n}{Q}{}^\beta = n_\beta\, \overset{n}{M}{}^{\alpha\beta}|_\alpha, \\ \overset{n}{Q}{}^\bullet &= \overset{n}{Q} - \frac{\partial T}{\partial s}, \\ \overset{n}{P}{}^\beta &= -\, \overset{n}{N}{}^{\alpha\beta}|_\alpha, \\ \overset{n}{P}{}^3 &= -\left(\overset{n}{Q}{}^\alpha|_\alpha + b_{\alpha\beta}\, \overset{n}{N}{}^{\alpha\beta}\right). \end{aligned}\right\} \tag{7$_3$}$$

Die Koeffizienten $\overset{\nu,\alpha}{c}$, $\overset{\nu}{c}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$; $\alpha = 1, 2$) des Ansatzes (7_1) werden nun so bestimmt, daß die mit (7) gebildete potentielle Energie

$$\overset{n}{\Pi} = \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{c}} \left(\overset{n}{N} - 2\,\bar{N}\right) n^\alpha \overset{n}{V}_\alpha\, ds + \frac{1}{2}\int_{\frac{2}{c}} \left(\overset{n}{S} - 2\,\bar{S}\right) e^\alpha \overset{n}{V}_\alpha\, ds + \frac{1}{2}\int_{\frac{3}{c}} \left(\overset{n}{Q}{}^* - 2\,\bar{Q}^*\right) \overset{n}{W}\, ds -$$

$$- \frac{1}{2}\int_{\frac{4}{c}} \left(\overset{n}{B} - 2\,\bar{B}\right) n^\alpha \overset{n}{W}|_\alpha\, ds - \frac{1}{2}\left[\overset{n}{T}\left(\overset{n}{W} - 2\,\overline{W}\right)\right]_1^2 - \frac{1}{2}\left[\overset{n}{T}\left(\overset{n}{W} - 2\,\overline{W}\right)\right]_3^4 -$$

$$- \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{c}} \overset{n}{N}\, n^\alpha \left(\overset{n}{V}_\alpha - 2\,\overline{V}_\alpha\right) ds - \frac{1}{2}\int_{\frac{2}{c}} \overset{n}{S}\, e^\alpha \left(\overset{n}{V}_\alpha - 2\,\overline{V}_\alpha\right) ds - \frac{1}{2}\int_{\frac{3}{c}} \overset{n}{Q}{}^* \left(\overset{n}{W} - 2\,\overline{W}\right) ds +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_{\frac{4}{c}} \overset{n}{B}\, n^\alpha \left(\overset{n}{W}|_\alpha - 2\,\overline{W}_\alpha\right) ds - \frac{1}{2}\left[\overset{n}{T}\left(\overset{n}{W} - 2\,\overline{W}\right)\right]_{2'}^{3'} - \frac{1}{2}\left[\overset{n}{T}\left(\overset{n}{W} - 2\,\overline{W}\right)\right]_{4'}^{1'} +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_F\int \left[\left(\overset{n}{p}{}^\alpha - 2\,\bar{p}^\alpha\right)\overset{n}{V}_\alpha + \left(\overset{n}{p}{}^3 - 2\,\bar{p}^3\right)\overset{n}{W}\right] df \qquad (8)$$

dem Extremum möglichst nahe kommt. Die Bedingungsgleichungen für das Eintreten des Extremwertes lauten

$$\frac{\partial \overset{n}{\Pi}}{\partial \overset{\nu,\alpha}{c}} = 0\,, \qquad \frac{\partial \overset{n}{\Pi}}{\partial \overset{\nu}{c}} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha = 1, 2) \qquad (9)$$

und haben die *Galerkin*sche Form.

3. Das Verfahren von Trefftz. Beim *Trefftz*schen Verfahren wird der Ansatz

$$\overset{n}{V}{}^\alpha = \sum_{\nu=1}^{n} \overset{\nu}{c}\, \overset{\nu}{\varphi}{}^\alpha\,, \qquad W = \sum_{\nu=1}^{n} \overset{\nu}{c}\, \overset{\nu}{\omega} \qquad (10)$$

verwendet, in dem die Funktionen $\overset{\nu}{\varphi}{}^\alpha$, $\overset{\nu}{\omega}$ Partikularlösungen der homogenen Schalengrundgleichungen (1) sind und entsprechend dem Variationsprinzip (6) in den Randpunkten beliebige Werte annehmen können. Bildet man die dem Verschiebungszustand (10) entsprechenden Randkräfte $\overset{n}{N}$, $\overset{n}{S}$, $\overset{n}{Q}$, $\overset{n}{Q}{}^*$ und Randmomente $\overset{n}{B}$, $\overset{n}{T}$, so ergeben sich mit

$$\overset{\nu}{d}{}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\overset{\nu}{\varphi}{}^\alpha|^\beta + \overset{\nu}{\varphi}{}^\beta|^\alpha\right) - b^{\alpha\beta}\,\overset{\nu}{\omega}\,,$$

$$\overset{\nu}{n}{}^{\alpha\beta} = \frac{E\,h}{1-\nu^2}\left(\overset{\nu}{d}{}^{\alpha\beta} + \nu\,\varepsilon^{\alpha\gamma}\,\varepsilon^{\beta\delta}\,\overset{\nu}{d}_{\gamma\delta}\right),$$

$$\overset{\nu}{m}{}^{\alpha\beta} = -\frac{E\,h}{1-\nu^2}\,\frac{h^2}{12}\left(\overset{\nu}{\omega}|^{\alpha\beta} + \nu\,\varepsilon^{\alpha\gamma}\,\varepsilon^{\beta\delta}\,\overset{\nu}{\omega}|_{\gamma\delta}\right),$$

$$\overset{\nu}{q}{}^\beta = \overset{\nu}{m}{}^{\alpha\beta}|_\alpha\,, \qquad \overset{\nu}{n}{}^{\alpha\beta}|_\alpha = 0\,, \qquad \overset{\nu}{q}{}^\alpha|_\alpha + b_{\alpha\beta}\,\overset{\nu}{n}{}^{\alpha\beta} = 0$$

und

$$\overset{\nu}{n} = n_\alpha\, n_\beta\, \overset{\nu}{n}{}^{\alpha\beta}\,, \qquad \overset{\nu}{s} = n_\alpha\, e_\beta\, \overset{\nu}{n}{}^{\alpha\beta}\,,$$

$$\overset{\nu}{b} = n_\alpha\, n_\beta\, \overset{\nu}{m}{}^{\alpha\beta}\,, \qquad \overset{\nu}{t} = -\,n_\alpha\, e_\beta\, \overset{\nu}{m}{}^{\alpha\beta}\,,$$

$$\overset{\nu}{q} = n_\alpha\, \overset{\nu}{q}{}^\alpha\,, \qquad \overset{\nu}{q}{}^* = \overset{\nu}{q} - \frac{\partial \overset{\nu}{t}}{\partial s}$$

die Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} \overset{n}{N} &= \sum_{\nu=1}^{n} \overset{\nu}{c}\,\overset{\nu}{n}, \\ \overset{n}{S} &= \sum_{\nu=1}^{n} \overset{\nu}{c}\,\overset{\nu}{s}, \\ \overset{n}{Q} &= \sum_{\nu=1}^{n} \overset{\nu}{c}\,\overset{\nu}{q}, \\ \overset{n}{Q^*} &= \sum_{\nu=1}^{n} \overset{\nu}{c}\,\overset{\nu}{q^*}, \\ \overset{n}{B} &= \sum_{\nu=1}^{n} \overset{\nu}{c}\,\overset{\nu}{b}, \\ \overset{n}{T} &= \sum_{\nu=1}^{n} \overset{\nu}{c}\,\overset{\nu}{t}. \end{aligned}\right\} \tag{11_1}$$

Da die Funktionen (10) voraussetzungsgemäß Partikularlösungen der homogenen Schalengrundgleichungen sind, wird

$$\overset{n}{p^\alpha} = \overset{n}{p^3} = 0\,. \tag{11_2}$$

Die n linearen Gleichungen für die Konstanten lauten mit (11)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overset{n}{\Pi}}{\partial \overset{\nu}{c}} = 0 = {} & \frac{1}{2}\int_{\overset{1}{c}} \left(\overset{\nu}{n}\, n^\alpha\, \overset{n}{V}_\alpha + \overset{n}{N}\, n^\alpha\, \overset{\nu}{\varphi}_\alpha - 2\,\bar{N}\, n^\alpha\, \overset{\nu}{\varphi}_\alpha\right) ds + \\ & + \frac{1}{2}\int_{\overset{2}{c}} \left(\overset{\nu}{s}\, e^\alpha\, \overset{n}{V}_\alpha + \overset{n}{S}\, e^\alpha\, \overset{\nu}{\varphi}_\alpha - 2\,\bar{S}\, e^\alpha\, \overset{\nu}{\varphi}_\alpha\right) ds + \\ & + \frac{1}{2}\int_{\overset{3}{c}} \left(\overset{\nu}{q^*}\, \overset{n}{W} + \overset{n}{Q^*}\, \overset{\nu}{\omega} - 2\,\bar{Q^*}\, \overset{\nu}{\omega}\right) ds - \\ & - \frac{1}{2}\int_{\overset{4}{c}} \left(\overset{\nu}{b}\, n^\alpha\, \overset{n}{W}|_\alpha + \overset{n}{B}\, n^\alpha\, \overset{\nu}{\omega}|_\alpha - 2\,\bar{B}\, n^\alpha\, \overset{\nu}{\omega}|_\alpha\right) ds - \\ & - \frac{1}{2}\left[\overset{\nu}{t}\, \overset{n}{W} + \overset{n}{T}\, \overset{\nu}{\omega} - 2\,\overset{\nu}{t}\, \bar{W}\right]_1^2 - \frac{1}{2}\left[\overset{\nu}{t}\, \overset{n}{W} + \overset{n}{T}\, \overset{\nu}{\omega} - 2\,\overset{\nu}{t}\, \bar{W}\right]_3^4 - \\ & - \frac{1}{2}\int_{\overset{1}{c}} \left(\overset{\nu}{n}\, n^\alpha\, \overset{n}{V}_\alpha + \overset{n}{N}\, n_\alpha\, \overset{\nu}{\varphi}_\alpha - 2\,\overset{\nu}{n}\, n^\alpha\, \bar{V}_\alpha\right) ds - \\ & - \frac{1}{2}\int_{\overset{2}{c}} \left(\overset{\nu}{s}\, e^\alpha\, \overset{n}{V}_\alpha + \overset{n}{S}\, e^\alpha\, \overset{\nu}{\varphi}_\alpha - 2\,\overset{\nu}{s}\, e^\alpha\, \bar{V}_\alpha\right) ds - \\ & - \frac{1}{2}\int_{\overset{3}{c}} \left(\overset{\nu}{q^*}\, \overset{n}{W} + \overset{n}{Q^*}\, \overset{\nu}{\omega} - 2\,\overset{\nu}{q^*}\, \bar{W}\right) ds + \\ & + \frac{1}{2}\int_{\overset{4}{c}} \left(\overset{\nu}{b}\, n^\alpha\, \overset{n}{W}|_\alpha + \overset{n}{B}\, n^\alpha\, \overset{\nu}{\omega}|_\alpha - 2\,\overset{\nu}{b}\, n^\alpha\, \bar{W}|_\alpha\right) ds - \\ & - \frac{1}{2}\left[\overset{\nu}{t}\, \overset{n}{W} + \overset{n}{T}\, \overset{\nu}{\omega} - 2\,\overset{\nu}{t}\, \bar{W}\right]_{2'}^{3'} - \frac{1}{2}\left[\overset{\nu}{t}\, \overset{n}{W} + \overset{n}{T}\, \overset{\nu}{\omega} - 2\,\overset{\nu}{t}\, \bar{W}\right]_{4'}^{1'} - \\ & - \int_F\int \left(\bar{p}^\alpha\, \overset{\nu}{\varphi}_\alpha + \bar{p}^3\, \overset{\nu}{\omega}\right) df = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)\,. \end{aligned} \tag{12}$$

Bei Anwendung des Bettischen Theorems[1] für eine Schale mit Randbedingungen entsprechend Abb. 1 gilt

$$\int_{\frac{1}{c}} \overset{n}{N}\, n^\alpha\, \overset{\nu}{\varphi}_\alpha\, ds + \int_{\frac{2}{c}} \overset{n}{S}\, e^\alpha\, \overset{\nu}{\varphi}_\alpha\, ds + \int_{\frac{3}{c}} \overset{n}{Q^*}\, \overset{\nu}{\omega}\, ds - \int_{\frac{4}{c}} \overset{n}{B}\, n^\alpha\, \overset{\nu}{\omega}|_\alpha\, ds + \left[\overset{n}{T}\, \overset{\nu}{\omega}\right]_1^2 + \left[\overset{n}{T}\, \overset{\nu}{\omega}\right]_3^4 +$$

$$+ \int_{\frac{1}{c}} \overset{n}{N}\, n^\alpha\, \overset{\nu}{\varphi}_\alpha\, ds + \int_{\frac{2}{c}} \overset{n}{S}\, e^\alpha\, \overset{\nu}{\varphi}_\alpha\, ds + \int_{\frac{3}{c}} \overset{n}{Q^*}\, \overset{\nu}{\omega}\, ds - \int_{\frac{4}{c}} \overset{n}{B}\, n^\alpha\, \overset{\nu}{\omega}|_\alpha\, ds + \left[\overset{n}{T}\, \overset{\nu}{\omega}\right]_{2'}^{3'} + \left[\overset{n}{T}\, \overset{\nu}{\omega}\right]_{4'}^{1'}$$

$$= \int_{\frac{1}{c}} \overset{\nu}{n}\, n^\alpha\, \overset{n}{V}_\alpha\, ds + \int_{\frac{2}{c}} \overset{\nu}{s}\, e^\alpha\, \overset{n}{V}_\alpha\, ds + \int_{\frac{3}{c}} \overset{\nu}{q}{}^*\, \overset{n}{W}\, ds - \int_{\frac{4}{c}} \overset{\nu}{b}\, n^\alpha\, \overset{n}{W}|_\alpha\, ds + \left[\overset{\nu}{t}\, \overset{n}{W}\right]_1^2 + \left[\overset{\nu}{t}\, \overset{n}{W}\right]_3^4 +$$

$$+ \int_{\frac{1}{c}} \overset{\nu}{n}\, n^\alpha\, \overset{n}{V}_\alpha\, ds + \int_{\frac{2}{c}} \overset{\nu}{s}\, e^\alpha\, \overset{n}{V}_\alpha\, ds + \int_{\frac{3}{c}} \overset{\nu}{q}{}^*\, \overset{n}{W}\, ds - \int_{\frac{4}{c}} \overset{\nu}{b}\, n^\alpha\, \overset{n}{W}|_\alpha\, ds + \left[\overset{\nu}{t}\, \overset{n}{W}\right]_{2'}^{3'} + \left[\overset{\nu}{t}\, \overset{n}{W}\right]_{4'}^{1'},$$

und damit können die n linearen Gleichungen für die Konstanten $\overset{\nu}{c}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) in der Form

$$\int_{\frac{1}{c}} \left(\overset{n}{N} - \overline{N}\right) n^\alpha\, \overset{\nu}{\varphi}_\alpha\, ds + \int_{\frac{2}{c}} \left(\overset{n}{S} - \overline{S}\right) e^\alpha\, \overset{\nu}{\varphi}_\alpha\, ds + \int_{\frac{3}{c}} \left(\overset{n}{Q^*} - \overline{Q^*}\right) \overset{\nu}{\omega}\, ds -$$

$$- \int_{\frac{4}{c}} \left(\overset{n}{B} - \overline{B}\right) n^\alpha\, \overset{\nu}{\omega}|_\alpha\, ds - \left[\overset{\nu}{t}\left(\overset{n}{W} - \overline{W}\right)\right]_1^2 - \left[\overset{\nu}{t}\left(\overset{n}{W} - \overline{W}\right)\right]_3^4 -$$

$$- \int_{\frac{1}{c}} \overset{\nu}{n}\, n^\alpha \left(\overset{n}{V}_\alpha - \overline{V}_\alpha\right) ds - \int_{\frac{2}{c}} \overset{\nu}{s}\, e^\alpha \left(\overset{n}{V}_\alpha - \overline{V}_\alpha\right) ds - \int_{\frac{3}{c}} \overset{\nu}{q}{}^* \left(\overset{n}{W} - \overline{W}\right) ds +$$

$$+ \int_{\frac{4}{c}} \overset{\nu}{b}\, n^\alpha \left(\overset{n}{W}|_\alpha - \overline{W}|_\alpha\right) ds - \left[\overset{\nu}{t}\left(\overset{n}{W} - \overline{W}\right)\right]_{2'}^{3'} - \left[\overset{\nu}{t}\left(\overset{n}{W} - \overline{W}\right)\right]_{4'}^{1'} -$$

$$- \int_F \int \left(\overline{p}^\alpha\, \overset{\nu}{\varphi}_\alpha + \overline{p}^3\, \overset{\nu}{\omega}\right) df = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{13}$$

angegeben werden. Läßt man in (10) die Anzahl der zur Approximation verwendeten Funktionen über alle Grenzen wachsen, dann liefert (13) die Koeffizienten des gegen die exakte Lösung konvergierenden Ansatzes.

4. Zusammenfassung. Es wird ein Variationsprinzip zweidimensionaler elastischer Kontinua aufgestellt, das als Sonderfälle das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie und das *Castiglianosche* Prinzip enthält. Da Randbedingungen des Variationsproblems nicht auftreten, können die bei den Verfahren von *Ritz* und *Trefftz* verwendeten Funktionen in allen Randpunkten beliebige Werte annehmen.

(Eingegangen am 12. Juni 1959.)

Anschrift des Verfassers: Professor Dr.-Ing. *D. Rüdiger*, Freiberg (Sachsen), Straße der Einheit 12.

[1] Vgl. z.B. *D. Rüdiger*, Z. angew. Math. Mech. 40 (1960) S. 114.

Die Analogie zwischen den Verschiebungen und den Spannungsfunktionen in der Biegetheorie der Kreiszylinderschale

Von **Hermann Schaefer**

1. Einführung. In früheren Arbeiten[1,2] habe ich darauf hingewiesen, daß in der klassischen Elastizitätstheorie des zweidimensionalen ebenen Kontinuums (Scheibe-Platte) eine vollständige Analogie besteht zwischen den 3 Verschiebungen v_1, v_2, v_3 und den 3 Spannungsfunktionen Φ_1, Φ_2, Φ_3 in der angegebenen Reihenfolge. Dabei sind v_1 und v_2 die Verschiebungen in der Scheibenebene, Φ_1 und Φ_2 die Spannungsfunktionen der Plattenbiegung. Altbekannt ist die Analogie von *Timpe-Wieghardt* zwischen v_3, der Durchbiegung der Platte, und Φ_3, der *Airy*schen Spannungsfunktion der Scheibe.

Beim gekrümmten zweidimensionalen Kontinuum, der Schale, ist eine solche Analogie bislang noch nicht bemerkt worden. Nun stehen bei einer sinnvollen Übertragung der Elastizitätstheorie von Scheibe und Platte auf die gekrümmte Schale mancherlei Möglichkeiten offen. An Biegetheorien dünner Schalen herrscht deshalb kein Mangel. Den meisten unter ihnen sieht man jedoch auf den ersten Blick an, daß in ihrem Rahmen unsere Analogie sicherlich nicht gilt.

In dem Wust der Schalengleichungen scheint mir unsere Analogie wertvoll als Ordnungsprinzip. Natürlich muß gezeigt werden, daß dieses Ordnungsprinzip nicht den Rahmen der oben erwähnten Möglichkeiten sprengt. Daß die Analogie zwischen Verschiebungen und Spannungsfunktionen in sinnvoller Weise auf die gekrümmte Schale übertragbar ist, soll am Beispiele der Kreiszylinderschale dargelegt werden.

2. Die Gleichgewichtsbedingungen. Das zweidimensionale Kontinuum der Kreiszylinderschale habe den Radius a. Die Koordinate in Richtung der Erzeugenden sei x_1, in Umfangsrichtung x_2. Die Schale sei nur an ihren Rändern belastet.

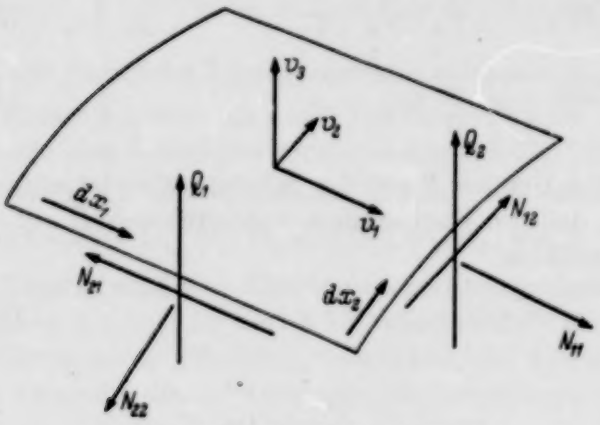


Abb. 1. Schnittkräfte und Verschiebungen

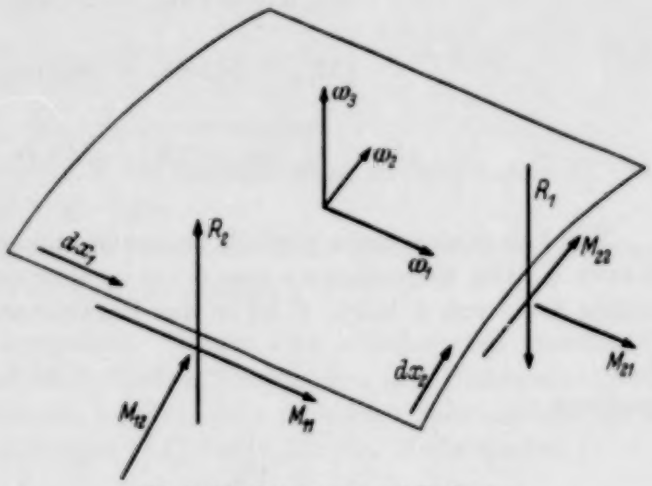


Abb. 2. Schnittmomente und Drehungen

Nach Abb. 1 lauten die Gleichgewichtsbedingungen für die Schnittkräfte

$$\partial_1 N_{11} + \partial_2 N_{21} = 0\,, \tag{2,1}$$

$$\partial_1 N_{12} + \partial_2 N_{22} - \frac{1}{a} Q_1 = 0\,, \tag{2,2}$$

$$\partial_1 Q_2 - \partial_2 Q_1 - \frac{1}{a} N_{22} = 0\,, \tag{2,3}$$

und für die Schnittmomente nach Abb. 2

$$\partial_1 M_{21} - \partial_2 M_{11} - Q_1 = 0\,, \tag{2,4}$$

$$\partial_1 M_{22} - \partial_2 M_{12} - Q_2 - \frac{1}{a} R_2 = 0\,, \tag{2,5}$$

$$-(\partial_1 R_1 + \partial_2 R_2) + (N_{12} - N_{21}) + \frac{1}{a} M_{12} = 0 \tag{2,6}$$

[1] *H. Schaefer*, Österr. Ing.-Arch. 10 (1956), S. 267.
[2] *H. Schaefer*, Abh. Braunschweig. Wiss. Ges. 5 (1956), S. 142.

(es bedeuten $\partial_i = \partial/\partial x_i$; $i = 1, 2$). R_1 und R_2, die Momente in Richtung der Schalennormalen, werden nur vorübergehend eingeführt und später Null gesetzt.

3. Die Spannungsfunktionen. Die 6 Gleichgewichtsbedingungen für die 12 Schnittgrößen erfüllen wir identisch in den 6 Spannungsfunktionen Ω_1, Ω_2, Ω_3 und Φ_1, Φ_2, Φ_3:

$$N_{11} = \partial_2 \Omega_1 , \qquad N_{21} = -\partial_1 \Omega_1 , \tag{3,1}$$

$$N_{12} = \partial_2 \Omega_2 + \frac{1}{a}\,\Omega_3 , \qquad N_{22} = -\partial_1 \Omega_2 , \tag{3,2}$$

$$Q_2 = \partial_2 \Omega_3 - \frac{1}{a}\,\Omega_2 , \qquad Q_1 = \partial_1 \Omega_3 , \tag{3,3}$$

$$M_{21} = \partial_2 \Phi_1 + \Omega_3 , \qquad M_{11} = \partial_1 \Phi_1 , \tag{3,4}$$

$$M_{22} = \partial_2 \Phi_2 + \frac{1}{a}\,\Phi_3 , \qquad M_{12} = \partial_1 \Phi_2 - \Omega_3 , \tag{3,5}$$

$$R_1 = \Omega_1 - \partial_2 \Phi_3 + \frac{1}{a}\,\Phi_2 , \qquad R_2 = \Omega_2 + \partial_1 \Phi_3 . \tag{3,6}$$

4. Die Randwerte der Spannungsfunktionen. Aus der Darstellung (3,1) bis (3,6) der Kräfte und Momente durch Spannungsfunktionen folgt

$$-N_{21}\,dx_1 + N_{11}\,dx_2 = d\Omega_1 , \tag{4,1}$$

$$-N_{22}\,dx_1 + N_{12}\,dx_2 = d\Omega_2 + \frac{1}{a}\,\Omega_3\,dx_2 , \tag{4,2}$$

$$Q_1\,dx_1 + Q_2\,dx_2 = d\Omega_3 - \frac{1}{a}\,\Omega_2\,dx_2 , \tag{4,3}$$

$$M_{11}\,dx_1 + (M_{21} - \Omega_3)\,dx_2 = d\Phi_1 , \tag{4,4}$$

$$(M_{12} + \Omega_3)\,dx_1 + M_{22}\,dx_2 = d\Phi_2 + \frac{1}{a}\,\Phi_3\,dx_2 , \tag{4,5}$$

$$(R_2 - \Omega_2)\,dx_1 - (R_1 - \Omega_1)\,dx_2 = d\Phi_3 - \frac{1}{a}\,\Phi_2\,dx_2 . \tag{4,6}$$

Wir betrachten einen einfach zusammenhängenden Bereich B auf der Schale, berandet von der Kurve C. Die Bogenlänge s von C sei so orientiert, daß bei wachsendem s der Bereich B auf der linken Seite von C liegt. C ist in der Parameterdarstellung

$$x_1 = x_1(s) , \qquad x_2 = x_2(s) \tag{4,7}$$

gegeben.

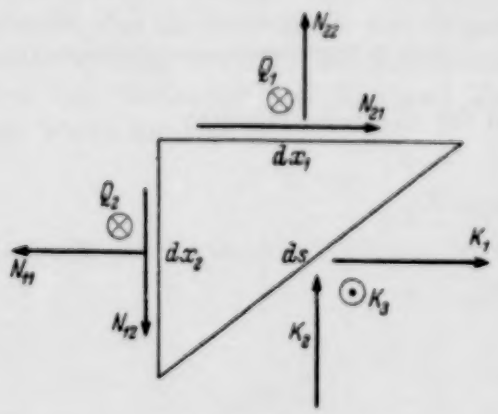


Abb. 3. Randkräfte

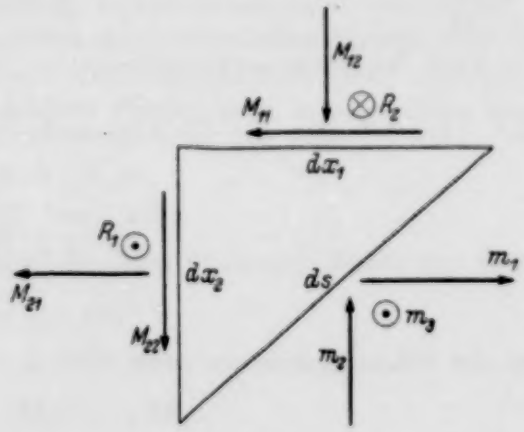


Abb. 4. Randmomente

Die am rechten Rand von C angreifende Randbelastung hält sich am Bereiche B das Gleichgewicht. Die Zusammenhänge zwischen Randbelastung und Schnittgrößen entnimmt man den Abbildungen 3 und 4.

Demnach gelten auf C die folgenden 6 Differentialbeziehungen zwischen Spannungsfunktionen und Randbelastungen:

$$\frac{d\Omega_1}{ds} = k_1 , \tag{4,8}$$

$$\frac{d\Omega_2}{ds} + \frac{1}{a}\,\Omega_3\,\frac{dx_2}{ds} = k_2 , \tag{4,9}$$

$$\frac{d\Omega_3}{ds} - \frac{1}{a}\,\Omega_2\,\frac{dx_2}{ds} = k_3 , \tag{4,10}$$

$$\frac{d\Phi_1}{ds} = m_1 - \Omega_3\,\frac{dx_3}{ds} , \tag{4,11}$$

$$\frac{d\Phi_2}{ds} + \frac{1}{a}\,\Phi_3\,\frac{dx_2}{ds} = m_2 + \Omega_3\,\frac{dx_1}{ds} , \tag{4,12}$$

$$\frac{d\Phi_3}{ds} - \frac{1}{a}\,\Phi_2\,\frac{dx_2}{ds} = m_3 - \Omega_2\,\frac{dx_1}{ds} + \Omega_1\,\frac{dx_2}{ds} . \tag{4,13}$$

Sind k_1, k_2, k_3 die Randkräfte je Längeneinheit und m_1, m_2, m_3 die Randmomente je Längeneinheit als Funktionen von s gegeben, so lassen sich die Randwerte der 6 Spannungsfunktionen $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$, Φ_1, Φ_2, Φ_3 nach (4,8) bis (4,13) durch Integrationen längs C berechnen.

Ohne uns hier mit der statischen Deutung der Randwerte unserer Spannungsfunktionen allzulange aufzuhalten, wollen wir nur vermerken, daß der Vektor $\Omega = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ die Kräftesumme und der Vektor $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3)$ die Momentensumme der Randbelastung eines endlichen Stückes E von C ist, Φ bezogen auf den Endpunkt von E.

5. Die Deformationen und ihre Verträglichkeitsbedingungen. Um die infinitesimalen Deformationsgrößen unseres zweidimensionalen Kontinuums zu definieren, bedienen wir uns des Prinzips der „virtuellen Kräfte", das wir hier in der folgenden Form postulieren:

Das über den Bereich B erstreckte Flächenintegral

$$\int \left(\sum_{i,k} \bar{N}_{ik}\,\varepsilon_{ik} + \sum_i \bar{Q}_i\,\beta_i + \sum_{i,k} \bar{M}_{ik}\,\varkappa_{ik} + \sum_i \bar{R}_i\,\chi_i \right) dF \qquad (i = 1, 2;\quad k = 1, 2) \tag{5,1}$$

soll für sämtliche Eigenspannungszustände $\bar{N}_{ik}$, $\bar{Q}_i$, $\bar{M}_{ik}$, $\bar{R}_i$ verschwinden.

Diese $\bar{N}_{ik}$ usw. sind die Schnittgrößen im Bereiche B bei unbelastetem Bereichsrande C. Sie müssen den Gleichgewichtsbedingungen (2,1) bis (2,6) genügen.

Natürlich ersetzt man in (5,1) die „virtuellen Kräfte" $\bar{N}_{ik}$ usw. durch die „virtuellen Spannungsfunktionen" $\bar{\Omega}_1$, $\bar{\Omega}_2$, $\bar{\Omega}_3$ und $\bar{\Phi}_1$, $\bar{\Phi}_2$, $\bar{\Phi}_3$, wie in (3,1) bis (3,6) angegeben.

Damit sind die Gleichgewichtsbedingungen abgegolten. Wegen des unbelasteten Randes C können nach (4,8) bis (4,13) sämtlichen 6 virtuellen Spannungsfunktionen die Randwerte Null erteilt werden. (Beiläufig bemerken wir, daß an inneren Lochrändern mehrfach zusammenhängender Bereiche die ∞^6 Lösungen der homogenen Gleichungen (4,8) bis (4,13) eine Rolle spielen.)

Nach Einführung der virtuellen Spannungsfunktionen in (5,1) wird partielle Integration angewendet (die Randintegrale verschwinden), nach $\bar{\Omega}_1$, $\bar{\Omega}_2$, $\bar{\Omega}_3$, $\bar{\Phi}_1$, $\bar{\Phi}_2$, $\bar{\Phi}_3$, geordnet und von der Unabhängigkeit dieser 6 Funktionen Gebrauch gemacht.

Die den Schnittgrößen zugeordneten Deformationen sind dann durch die folgenden 6 Gleichungen definiert:

$$\partial_1\varepsilon_{21} - \partial_2\varepsilon_{11} + \chi_1 = 0 , \tag{5,2}$$

$$\partial_1\varepsilon_{22} - \partial_2\varepsilon_{12} + \chi_2 - \frac{1}{a}\,\beta_2 = 0 , \tag{5,3}$$

$$-(\partial_1\beta_1 + \partial_2\beta_2) - (\varkappa_{12} - \varkappa_{21}) + \frac{1}{a}\,\varepsilon_{12} = 0 , \tag{5,4}$$

$$-\partial_1\varkappa_{11} - \partial_2\varkappa_{21} = 0 , \tag{5,5}$$

$$-\partial_1\varkappa_{12} - \partial_2\varkappa_{22} + \frac{1}{a}\,\chi_1 = 0 , \tag{5,6}$$

$$-\partial_1\chi_2 + \partial_2\chi_1 + \frac{1}{a}\,\varkappa_{22} = 0 . \tag{5,7}$$

Diese Verträglichkeitsbedingungen haben praktisch dieselbe Gestalt wie die Gleichgewichtsbedingungen (2,1) bis (2,6). So, wie wir diese nach (3,1) bis (3,6) identisch in den Spannungsfunktionen befriedigten, können wir die Deformationen durch 3 „Drehungen" ω_1, ω_2, ω_3 und 3 „Verschiebungen" v_1, v_2, v_3, also durch 6 voneinander unabhängige Verschiebungsgrößen ausdrücken. Wir bekommen die Darstellung:

$$-\varkappa_{11} = \partial_2\omega_1\,, \qquad -\varkappa_{21} = -\partial_1\omega_1\,, \tag{5,8}$$

$$-\varkappa_{12} = \partial_2\omega_2 + \frac{1}{a}\,\omega_3\,, \qquad -\varkappa_{22} = -\partial_1\omega_2\,, \tag{5,9}$$

$$-\chi_2 = \partial_2\omega_3 - \frac{1}{a}\,\omega_2\,, \qquad -\chi_1 = \partial_1\omega_3\,, \tag{5,10}$$

$$\varepsilon_{21} = \partial_2 v_1 + \omega_3\,, \qquad \varepsilon_{11} = \partial_1 v_1\,, \tag{5,11}$$

$$\varepsilon_{22} = \partial_2 v_2 + \frac{1}{a}\,v_3\,, \qquad \varepsilon_{12} = \partial_1 v_2 - \omega_3\,, \tag{5,12}$$

$$\beta_1 = \omega_1 - \partial_2 v_3 + \frac{1}{a}\,v_2\,, \qquad \beta_2 = \omega_2 + \partial_1 v_3\,. \tag{5,13}$$

Den Vektor $v = (v_1, v_2, v_3)$ identifizieren wir mit dem Verschiebungsvektor unseres zweidimensionalen Kontinuums.

6. Die Analogien zwischen Verschiebungen und Spannungsfunktionen, Deformationen und Schnittgrößen. Erfahrungsgemäß sind die Normalenmomente R_1 und R_2 Null. (Das bedeutet streng genommen eine Aussage über eine Materialeigenschaft unseres zweidimensionalen Kontinuums.) Um zu einer Analogie zu kommen, setzen wir auch die Schubdeformationen β_1 und β_2 Null. Dabei entarteten die Querkräfte Q_1 und Q_2 zu Reaktionskräften. Die den Normalenmomenten zugeordneten Deformationen χ_1 und χ_2 werden uninteressant, weil sie keinen Beitrag zur elastischen Energie der Schale liefern, und die Gleichungen (5,10) werden überflüssig. Nach (5,13) können wir die Drehungen ω_1 und ω_2 durch Verschiebungen ausdrücken:

$$\omega_1 = \partial_2 v_3 - \frac{1}{a}\,v_2\,, \qquad \omega_2 = -\partial_1 v_3\,, \tag{6,1}$$

und nach (3,6) wird analog

$$\Omega_1 = \partial_2 \Phi_3 - \frac{1}{a}\,\Phi_2\,, \qquad \Omega_2 = -\partial_1 \Phi_3\,. \tag{6,2}$$

Es stehen nun gegenüber:

$$\varepsilon_{11} = \partial_1 v_1\,, \qquad M_{11} = \partial_1 \Phi_1\,, \tag{6,3}$$

$$\varepsilon_{12} = \partial_1 v_2 - \omega_3\,, \qquad M_{12} = \partial_1 \Phi_2 - \Omega_3\,, \tag{6,4}$$

$$\varepsilon_{21} = \partial_2 v_1 + \omega_3\,, \qquad M_{21} = \partial_2 \Phi_1 + \Omega_3\,, \tag{6,5}$$

$$\varepsilon_{22} = \partial_2 v_2 + \frac{1}{a}\,v_3\,, \qquad M_{22} = \partial_2 \Phi_2 + \frac{1}{a}\,\Phi_3\,, \tag{6,6}$$

$$-\varkappa_{11} = \partial_2\omega_1\,, \qquad N_{11} = \partial_2\Omega_1\,, \tag{6,7}$$

$$-\varkappa_{12} = \partial_2\omega_2 + \frac{1}{a}\,\omega_3\,, \qquad N_{12} = \partial_2\Omega_2 + \frac{1}{a}\,\Omega_3\,, \tag{6,8}$$

$$-\varkappa_{21} = -\partial_1\omega_1\,, \qquad N_{21} = -\partial_1\Omega_1\,, \tag{6,9}$$

$$-\varkappa_{22} = -\partial_1\omega_2\,. \qquad N_{22} = -\partial_1\Omega_2\,. \tag{6,10}$$

Dieser kinematisch-statischen Analogie mußten allerdings die Querkraftsverformungen β_1 und β_2 geopfert werden, ein Umstand aber, der bei dünnen Schalen nicht ins Gewicht fällt.

7. Das Elastizitätsgesetz. Unsere Kreiszylinderschale habe überall dieselbe Dicke h, und h sei so klein gegen a, daß h^2/a^2 gegenüber 1 immer vernachlässigt werden darf. Das oben betrachtete zweidimensionale Kontinuum identifizieren wir mit der Mittelfläche der Schale.

Bei der Einführung des Elastizitätsgesetzes, des Zusammenhanges zwischen Schnittgrößen und Deformationen, haben wir darauf zu achten, daß unsere Analogie nicht zerstört wird.

Nach dem Beispiel der *Reißner-Meißner*schen Biegetheorie der axialsymmetrisch beanspruchten Rotationsschale setzen wir zunächst

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= L\,(N_{11} - \nu\, N_{22})\,, & M_{11} &= K\,(\varkappa_{11} + \nu\,\varkappa_{22})\,, \\ \varepsilon_{22} &= L\,(N_{22} - \nu\, N_{11})\,, & M_{22} &= K\,(\varkappa_{22} + \nu\,\varkappa_{11}) \end{aligned}\right\} \tag{7,1}$$

mit

$$L = \frac{1}{E\,h} \qquad \text{und} \qquad K = \frac{E\,h^3}{12\,(1-\nu^2)} \tag{7,2}$$

und der Umkehrung

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_{11} &= B\,(M_{11} - \nu\, M_{22})\,, & N_{11} &= D\,(\varepsilon_{11} + \nu\,\varepsilon_{22})\,, \\ \varkappa_{22} &= B\,(M_{22} - \varepsilon\, M_{11})\,, & N_{22} &= D\,(\varepsilon_{22} + \nu\,\varepsilon_{11}) \end{aligned}\right\} \tag{7,3}$$

mit

$$B = \frac{12}{E\,h^3} \qquad \text{und} \qquad D = \frac{E\,h}{1-\nu_2} \tag{7,4}$$

(E Elastizitätsmodul, ν *Poisson*sche Querkontraktionsziffer).

Die elastische Energie je Flächeneinheit der Schalenmittelfläche ist

$$\begin{aligned} A = {} & \frac{1}{2}\,(N_{11}\,\varepsilon_{11} + N_{22}\,\varepsilon_{22}) + \frac{1}{2}\,(N_{12} + N_{21})\,\frac{1}{2}\,(\varepsilon_{12} + \varepsilon_{21}) + \frac{1}{2}\,(N_{12} - N_{21})\,\frac{1}{2}\,(\varepsilon_{12} - \varepsilon_{21}) \\ & + \frac{1}{2}\,(M_{11}\,\varkappa_{11} + M_{22}\,\varkappa_{22}) + \frac{1}{2}\,(M_{12} + M_{21})\,\frac{1}{2}\,(\varkappa_{12} + \varkappa_{21}) + \frac{1}{2}\,(M_{12} - M_{21})\,\frac{1}{2}\,(\varkappa_{12} - \varkappa_{21})\,. \end{aligned} \tag{7,5}$$

Die Deformationsgröße

$$\frac{1}{2}\,(\varepsilon_{12} - \varepsilon_{21}) = \frac{1}{2}\,(\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1) - \omega_3 \tag{7,6}$$

ist beim ebenen Kontinuum Null. Die Festsetzung

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} \tag{7,7}$$

bedeutet für unser gekrümmtes zweidimensionales Kontinuum eine kinematische Zwangsbedingung, derzufolge der unsymmetrische Teil des Tensors N_{ik} zu einem Reaktionsmoment entartet. Gleichung (7,7) entspricht den Festsetzungen (6,1), die der Schale die Querkraftsdeformationen verbieten.

Um bei der Festsetzung $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$ unsere Analogie zu wahren, müssen wir nach (6,4) und (6,5)

$$M_{12} = M_{21} \tag{7,8}$$

fordern. Auch die Symmetrie des Tensors M_{ik} ist in der klassischen Plattentheorie vorhanden.

Wir führen die Abkürzungen

$$\hat{N}_{12} = \frac{1}{2}\,(N_{12} + N_{21})\,, \qquad \hat{\varkappa}_{12} = \frac{1}{2}\,(\varkappa_{12} + \varkappa_{21}) \tag{7,9}$$

ein und können nach den Festsetzungen (7,7) und (7,8) der elastischen Energie die Gestalt geben:

$$A = \frac{1}{2}\,(N_{11}\,\varepsilon_{11} + N_{22}\,\varepsilon_{22} + 2\,\hat{N}_{12}\,\varepsilon_{12} + M_{11}\,\varkappa_{11} + M_{22}\,\varkappa_{22} + 2\,M_{12}\,\hat{\varkappa}_{12})\,. \tag{7,10}$$

Unser Elastizitätsgesetz vervollständigen wir nun durch die ebenfalls dem ebenen Kontinuum entlehnten Beziehungen

$$\hat{N}_{12} = D\,(1-\nu)\,\varepsilon_{12}\,, \qquad M_{12} = K\,(1-\nu)\,\hat{\varkappa}_{12}\,. \tag{7,11}$$

Die Gleichungen (7,7) und (7,8) führen zu den analogen Gleichungen

$$\omega_3 = \frac{1}{2}\,(\partial_1 v_2 - \partial_2 v_1)\,, \qquad \Omega_3 = \frac{1}{2}\,(\partial_1 \Phi_2 - \partial_2 \Phi_1)\,. \tag{7,12}$$

Damit sind sämtliche Deformationen durch die Verschiebungen v_1, v_2, v_3 und sämtliche Schnittgrößen durch die Spannungsfunktionen Φ_1, Φ_2, Φ_3 ausgedrückt.

Wir betonen, daß nach wie vor sämtliche Gleichgewichtsbedingungen exakt erfüllt sind, auch die wegen $R_1 = R_2 = 0$ algebraische (2,6)

$$N_{12} - N_{21} + \frac{1}{a} M_{12} = 0 . \tag{7,13}$$

8. Die dualen Variationsprobleme. Zufolge unserer Elastizitätsgesetze (7,1) bis (7,4) und (7,11) können wir (7, 10) entweder durch die Deformationen oder die Schnittgrößen ausdrücken. Wir erhalten also die beiden Darstellungen

$$A_1 = \frac{E h}{2(1-\nu^2)} \Big\{ [(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})^2 - 2(1-\nu)(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} - \varepsilon_{12}^2)] + \frac{h^2}{12} [(\varkappa_{11} + \varkappa_{22})^2 - 2(1-\nu)(\varkappa_{11}\varkappa_{22} - \hat{\varkappa}_{12}^2)] \Big\} , \tag{8,1}$$

$$A_2 = \frac{6}{E h^3} \Big\{ [(M_{11} + M_{22})^2 - 2(1+\nu)(M_{11} M_{22} - M_{12}^2)] + \frac{h^2}{12} [(N_{11} + N_{22})^2 - 2(1+\nu)(N_{11} N_{22} - \hat{N}_{12}^2)] \Big\} . \tag{8,2}$$

Um zu Variationsproblemen zu kommen, hat man A_1 durch die 3 Verschiebungen und A_2 durch die 3 Spannungsfunktionen auszudrücken. Die Variationsprobleme lauten

$$\int A_1[v_1, v_2, v_3]\, dF \to \text{Min.} , \tag{8,3}$$

$$\int A_2[\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3]\, dF \to \text{Min} . \tag{8,4}$$

Zufolge unserer bisherigen Analogien unterscheiden sich aber die *Euler-Lagrange*schen Differentialgleichungen beider Variationsprobleme — wie (8,1) und (8,2) erkennen lassen — nur durch das Vorzeichen von ν, was zu beweisen war.

9. Das Variationsproblem für die Spannungsfunktionen. Nachdem wir das gesteckte Ziel erreicht haben, bleibt noch die Genauigkeit unserer neuen Biegetheorie zu erörtern. Dazu müssen wir eins der beiden Variationsprobleme weiter verfolgen. Wir wählen (8,4).

Zunächst eine kleine Vereinfachung in (8,2): Es ist nach (7,13)

$$N_{11} N_{22} - \hat{N}_{12}^2 = N_{11} N_{22} - N_{12} N_{21} - \frac{1}{4 a^2} M_{12}^2 . \tag{9,1}$$

Wegen $\frac{h^2}{a^2} \ll 1$ darf das letzte Glied gegen M_{12}^2 in der ersten eckigen Klammer von (8,2) vernachlässigt werden. Entsprechendes gilt für (8,1).

In (8,2) sind einzuführen:

$$M_{11} + M_{22} = M = \partial_1 \Phi_1 + \partial_2 \Phi_2 + \frac{1}{a} \Phi_3 , \tag{9,2}$$

$$N_{11} + N_{22} = \Delta \Phi_3 - \frac{1}{a} \partial_2 \Phi_2 \qquad (\Delta \equiv \partial_1 \partial_1 + \partial_2 \partial_2) , \tag{9,3}$$

$$M_{11} M_{22} - M_{12}^2 = (\partial_1 \Phi_1 \partial_2 \Phi_2 - \partial_1 \Phi_2 \partial_2 \Phi_1) + \frac{1}{a} \Phi_3 \partial_1 \Phi_1 - \Omega_3^2 , \tag{9,4}$$

$$\Omega_3 = \frac{1}{2} (\partial_1 \Phi_2 - \partial_2 \Phi_1) , \tag{9,5}$$

$$N_{11} N_{22} - N_{12} N_{21} = (\partial_1 \Omega_1 \partial_2 \Omega_2 - \partial_1 \Omega_2 \partial_2 \Omega_1) + \frac{1}{a} \Omega_3 \Big(\partial_1 \partial_2 \Phi_3 - \frac{1}{a} \partial_1 \Phi_2 \Big) . \tag{9,6}$$

Die ersten geklammerten Glieder auf den rechten Seiten von (9,4) und (9,6) sind Divergenzen und liefern deshalb keine Beiträge zu den *Euler-Lagrange*schen Gleichungen eines Variationsproblems. Den Integranden von (8,4) können wir somit bis auf einen konstanten Faktor schreiben:

$$A_2 = \Big| \frac{1}{2} M^2 + (1+\nu) \Omega_3^2 - (1+\nu) \frac{1}{a} \Phi_3 \partial_1 \Phi_1 \Big| + \frac{h^2}{12} \Big| \frac{1}{2} \Big(\Delta \Phi_3 - \frac{1}{a} \partial_2 \Phi_2 \Big)^2 - (1+\nu) \frac{1}{a} \Omega_3 \Big(\partial_1 \partial_2 \Phi_3 - \frac{1}{a} \partial_1 \Phi_2 \Big) \Big| . \tag{9,7}$$

Nach den Regeln der Variationsrechnung erhalten wir die 3 Differentialgleichungen

$$\partial_1 M - (1+\nu)\,\partial_2 \Omega_3 - (1+\nu)\,\frac{1}{a}\,\partial_1 \Phi_3 = -\frac{h^2}{12}\,(1+\nu)\,\frac{1}{2\,a}\,\partial_1\partial_2\left(\partial_2\Phi_3 - \frac{1}{a}\,\Phi_2\right), \tag{9,8}$$

$$\partial_2 M + (1+\nu)\,\partial_1 \Omega_3 = \frac{h^2}{12}\,(1+\nu)\,\frac{1}{2\,a}\,\partial_1\partial_1\left(\partial_2\Phi_3 - \frac{1}{a}\,\Phi_2\right) + \frac{h^2}{12}\,\frac{1}{a}\,\partial_2\left(\Delta\Phi_3 - \frac{1}{a}\,\partial_2\Phi_2\right), \tag{9,9}$$

$$\frac{1}{a}\,M - (1+\nu)\,\frac{1}{a}\,\partial_1\Phi_1 + \frac{h^2}{12}\left[\Delta\left(\Delta\Phi_3 - \frac{1}{a}\,\partial_2\Phi_2\right) - (1+\nu)\,\frac{1}{a}\,\partial_1\partial_2\Omega_3\right] = 0\,. \tag{9,10}$$

Aus (9,8) und (9,9) lassen sich M und Ω_3 sehr einfach eliminieren:

$$\Delta M = (1+\nu)\,\frac{1}{a}\,\partial_1\partial_1\Phi_3 + \frac{h^2}{12\,a}\,\partial_2\partial_2\left(\Delta\Phi_3 - \frac{1}{a}\,\partial_2\Phi_2\right), \tag{9,11}$$

$$\begin{aligned}(1+\nu)\,\Delta\Omega_3 = &-(1+\nu)\,\frac{1}{a}\,\partial_1\partial_2\Phi_3 + \frac{h^2}{12\,a}\,\frac{1+\nu}{2}\,\partial_1\Delta\left(\partial_2\Phi_3 - \frac{1}{a}\,\Phi_2\right)\\ &+ \frac{h^2}{12\,a}\,\partial_1\partial_2\left(\Delta\Phi_3 - \frac{1}{a}\,\partial_2\Phi_2\right).\end{aligned} \tag{9,12}$$

Die störenden Glieder mit Φ_2 auf den rechten Seiten sind von der Größenordnung h^2/a^2 gegenüber den ihnen entsprechenden Gliedern auf den linken Seiten. Würden wir sie einfach weglassen, dann könnten unsere Differentialgleichungen nicht mehr die ∞^6 Lösungen $\Phi_1^{(0)}$, $\Phi_2^{(0)}$, $\Phi_3^{(0)}$ für die am Rande unbelastete Schale enthalten. Diese werden, wie schon im Abschnitt **5** erwähnt, bei einem mehrfach berandeten Schalengebiet benötigt. (Im dualen Variationsproblem (8,3) haben wir das Anlogon in den ∞^6 Verschiebungszuständen $v_1^{(0)}$, $v_2^{(0)}$, $v_3^{(0)}$ der undeformierten Schale.) Eingehende Betrachtungen über die Rolle der „Nullspannungsfunktionen" des ebenen Kontinuums findet man in meiner früheren Arbeit*. Nach (3,3) und (3,5) gelten für die uns hier interessierende Nullspannungsfunktion $\Phi_2^{(0)}$ die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\partial_1\Omega_3^{(0)} &= 0\,,\\ \partial_2\Phi_2^{(0)} + \frac{1}{a}\,\Phi_3^{(0)} &= 0\,,\\ \partial_1\Phi_2^{(0)} - \Omega_3^{(0)} &= 0\end{aligned}\right\} \tag{9,13}$$

Demnach dürfen wir in (9,11)

$$\partial_2\Phi_2 = -\frac{1}{a}\,\Phi_3 \tag{9,14}$$

setzen, das gleiche in der zweiten Klammer auf der rechten Seite von (9,12). In dem vorangehenden Gliede darf

$$\Delta\Phi_2 = -\frac{1}{a}\,\partial_2\Phi_3 \tag{9,15}$$

gesetzt werden. Damit aber tritt auf den rechten Seiten von (9,11) und (9,12) nur noch Φ_3 auf.

Um die Elimination von Φ_1 und Φ_2 weiter zu treiben mit dem Ziele, eine einzige Gleichung für Φ_3 zu erhalten, machen wir die Substitution

$$\left.\begin{aligned}\Phi_1 &= -\partial_2 H + \frac{1+\nu}{2}\,\partial_1 G\,,\\ \Phi_2 &= \partial_1 H + \frac{1+\nu}{2}\,\partial_2 G\end{aligned}\right\} \tag{9,16}$$

und erhalten

$$\left.\begin{aligned}M &= \frac{1+\nu}{2}\,\Delta G + \frac{1}{a}\,\Phi_3\,,\\ \Omega_3 &= \frac{1}{2}\,\Delta H\,.\end{aligned}\right\} \tag{9,17}$$

* Siehe Fußnote 2 von Seite 125.

Die Gleichungen (9,11) und (9,12) lauten jetzt

$$\frac{1+\nu}{2}\,\Delta\Delta G = -\frac{1}{a}\,\Delta\Phi_3 + (1+\nu)\,\frac{1}{a}\,\partial_1\partial_1\Phi_3 + \frac{h^2}{12\,a}\,\partial_2\partial_2\left(\Delta\Phi_3 + \frac{1}{a^2}\,\Phi_3\right). \tag{9,18}$$

$$\frac{1+\nu}{2}\,\Delta\Delta H = -(1+\nu)\,\frac{1}{a}\,\partial_1\partial_2\Phi_3 + \frac{h^2}{12\,a}\,\frac{3+\nu}{2}\,\partial_1\partial_2\left(\Delta\Phi_3 + \frac{1}{a^2}\,\Phi_3\right). \tag{9,19}$$

Die Gleichungen (9,16) führen wir auch in (9,10) ein, wenden den Operator $\Delta\Delta$ auf diese Gleichung an und ersetzen die hier auftretenden $\Delta\Delta G$ und $\Delta\Delta H$ durch (9,18) und (9,19). Damit ist die Elimination von Φ_1 und Φ_2 vollzogen, und es bleibt nach einiger Rechnung ($h^2/a^2 \ll 1$)

$$a^8\,\Delta\Delta\Delta\Delta\Phi_3 + 2\,a^6\,\Delta\,\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\left(\Delta\Phi_3 + 2\,\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial x_1^2}\right)$$
$$+ a^4\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\left(\Delta\Phi_3 + 2\,\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial x_2^2}\right) + \frac{12\,a^2}{h^2}\,(1-\nu^2)\,\frac{\partial^4\Phi_3}{\partial x_1^4}\right] = 0\,. \tag{9,20}$$

Für v_3, die Verschiebung in Richtung der Schalennormalen, besteht dieselbe Differentialgleichung; denn (9,20) ist invariant gegenüber der Vertauschung des Vorzeichens von ν. Die Größe Φ_3 entspricht aber der *Airy*schen Spannungsfunktion der Scheibe und v_3 der Durchbiegung der Platte. Somit treffen wir auch bei der Schale auf die *Timpe-Wieghardt*sche Analogie.

Ein Prüfstein für die Genauigkeit einer Biegetheorie des Kreiszylinders ist die charakteristische Gleichung der Partikulärlösung

$$\Phi_3 = e^{\lambda\frac{x_1}{a}}\cos n\,\frac{x_2}{a} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)\,, \tag{9,21}$$

die bei uns

$$\lambda^8 - 4\,n^2\,\lambda^6 + \left[6\,n^2\,(n^2-1) + \frac{12\,a^2}{h^2}\,(1-\nu^2)\right]\lambda^4$$
$$- n^2\,(4\,n^4 - 8\,n^2 + 3)\,\lambda^2 + n^4\,(n^2-1)^2 = 0 \tag{9,22}$$

lautet.

In der nach ganz anderen Gesichtspunkten aufgebauten Biegetheorie der Kreiszylinderschale von *W. Flügge*[1], einer Theorie großer Genauigkeit und logischer Geschlossenheit, die allerdings keine Spannungsfunktionen benutzt, gibt der Ansatz

$$v_3 = e^{\lambda\frac{x_1}{a}}\cos n\,\frac{x_2}{a} \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \ldots) \tag{9,23}$$

die charakteristische Gleichung

$$\lambda^8 - 2\,(2\,n^2 - \nu)\,\lambda^6 + \left[6\,n^2(n^2-1) + \frac{12\,a^2}{h^2}\,(1-\nu^2)\right]\lambda^4$$
$$- n^2\,[4\,n^4 - (8-2\,\nu)\,n^2 + 4 - 2\,\nu]\,\lambda^2 + n^4(n^2-1)^2 = 0\,. \tag{9,24}$$

Der Vergleich mit (9,22) zeigt in den Koeffizienten von λ^6 und λ^2 Unterschiede, die wegen $0 \leqq \nu \leqq \frac{1}{2}$ nur bei $n = 0$ und $n = 1$ erwähnenswert sind. Aber dann macht der überwiegende Faktor von λ^4 (Größenordnung 10^3) gerade die Glieder mit λ^6 und λ^2 bedeutungslos. Es kann somit festgestellt werden, daß unsere Analogie nicht mit einem Verlust an Genauigkeit erkauft zu werden brauchte.

10. Randbedingungen bei belastetem Rande. Bekanntlich können den 3 Verschiebungen v_1, v_2, v_3 4 Bedingungen am Rande auferlegt werden. Zufolge unserer Analogie können die 3 Spannungsfunktionen auch dann nur 4 Bedingungen erfüllen, wenn am Rande die 5 Komponenten der Belastung vorgeschrieben sind. In diesem Falle haben wir so vorzugehen: Nach (4,8) bis (4,13) werden die Randwerte der 6 Spannungsfunktionen Ω_1, Ω_2, Ω_3, Φ_1, Φ_2, Φ_3 durch Integration ermittelt. Anschließend kann nach (6,2) die Normalableitung von Φ_3 berechnet werden. Somit haben wir 4 Randbedingungen für Φ_1, Φ_2, Φ_3 gewonnen, und die Randwerte von Ω_1, Ω_2 und Ω_3 müssen im Laufe der weiteren Rechnung ignoriert werden. Im Endergebnis der Schalenberechnung kann man aus den bekannten Φ_1, Φ_2, Φ_3 die Ω_1, Ω_2, Ω_3 berechnen und dann rückwärts aus (4,8) bis (4,13)

[1] *W. Flügge*, Statik und Dynamik der Schalen, S. 152. 2. Aufl. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1957.

eine Randbelastung ermitteln, die zwar im allgemeinen nicht mit der vorgeschriebenen übereinstimmt, ihr jedoch an jedem Bogenelement der Berandung statisch äquivalent ist.

Die bei mehrfach berandeten Bereichen auftretenden Komplikationen sind bereits oben besprochen worden.

11. Zusammenfassung. Für die Kreiszylinderschale wurde eine Biegetheorie aufgestellt, in der die Gleichgewichtsbedingungen (unter Voraussetzung der Symmetrie des Momententensors M_{ik}) durch drei Spannungsfunktionen Φ_1, Φ_2, Φ_3 exakt erfüllt sind. Bei der Definition der Deformationsgrößen und der Einführung der Elastizitätsgesetze war die *Reißner-Meißner*sche Theorie der symmetrisch belasteten Rotationsschale das Vorbild. Die drei Differentialgleichungen für die Verschiebungen v_1, v_2, v_3 unterscheiden sich von den drei Differentialgleichungen für die Spannungsfunktionen Φ_1, Φ_2, Φ_3 formal nur im Vorzeichen der *Poisson*schen Querkontraktionsziffer ν. Die beiden Differentialgleichungen achter Ordnung, die man nach Eliminationsprozessen sowohl für v_3 als auch für Φ_3 erhält, unterscheiden sich nicht mehr voneinander. So trifft man bei der Zylinderschale die *Timpe-Wieghardt*sche Analogie zwischen Durchbiegung v_3 der Platte und *Airy*scher Spannungsfunktion Φ_3 der Scheibe wieder.

Es konnte ferner gezeigt werden, daß unsere neue Biegetheorie der bekannten *Flügge*schen Theorie an Genauigkeit nicht nachsteht.

Es ist wohl nicht zu bezweifeln, daß auch bei Schalen beliebiger Gestalt unsere Analogie vorhanden ist. Sie scheint uns wertvoll als Ordnungsprinzip inmitten der Fülle von Gleichungen, die nun einmal zu einer Schalentheorie gehören.

Die Formulierung des Schalenproblems mit Hilfe der drei Spannungsfunktionen Φ_1, Φ_2, Φ_3 wird sich immer dann empfehlen, wenn die Randbelastung vorgegeben ist. Denn dann lassen sich die Randbedingungen in den Spannungsfunktionen übersichtlicher formulieren als in den Verschiebungen. Auch die Gewißheit, daß selbst durch radikales Streichen lästiger Glieder in den Differentialgleichungen der Spannungsfunktionen die Gleichgewichtsbedingungen nicht verletzt werden, mag manchem Rechner angenehm sein.

(Eingegangen am 22. Juni 1959.)

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr.-Ing. H. Schaefer, Braunschweig, Bernerstraße 9.

Eigenschwingungszahlen zusammengesetzter Schwingungs-Systeme

Von **E. Hübner**

1. Einleitung. Der Einsatz moderner Rechenautomaten ermöglicht es in neuerer Zeit, Schwingungsgebilde mit einer hohen Zahl von Freiheitsgraden zu berechnen. Besonders prädestiniert für diese Verfahren sind stab- bzw. plattenförmige Gebilde, bei denen der Berechnungsgang mit Hilfe des Matrizenkalküls auf einfache, stets wiederkehrende Rechenoperationen (Matrizenmultiplikationen) zurückgeführt werden kann[1]. Dabei lassen sich auch erschwerende Randbedingungen (beispielsweise elastisch gelagerte Stützen, oder in besonderen Fällen die elastischen Eigenschaften eines vorhandenen Fundamentes) in die Rechnung einbeziehen.

Bei komplexen, aus kontinuierlichen Teilgebilden zusammengesetzten Systemen ist die Anwendung dieser Berechnungsverfahren im allgemeinen nicht ohne weiteres möglich. Hier kann eine Verallgemeinerung des bekannten Verfahrens[2, 3] der Aufspaltung eines Schwingungssystems in einfacher aufgebaute, und damit leichter zu berechnende, Teilgebilde wesentliche Vorteile bringen. Wird dabei die Zerlegung so vorgenommen, daß die entstehenden Teilgebilde stab- oder plattenförmig sind, wie dies bei den meisten technisch wichtigen Anordnungen möglich ist, dann können die vorerwähnten Verfahren zur Berechnung der Eigenwerte und Eigenformen der Teilgebilde angewendet werden. Die Eigenwerte des Gesamtsystems lassen sich dann in einem anschließenden Rechnungsgang, in dem die vorliegenden Verknüpfungsbedingungen zum Ansatz kommen, ausrechnen.

Wesentlich ist aber, daß der Ablauf dieses Rechnungsganges möglichst rationell gestaltet wird. Dafür eignet sich in ganz besonderer Weise die Matrizenrechnung; durch deren Anwendung werden die zur Verknüpfung der Teilgebilde-Schwingungsgleichungen erforderlichen algebraischen Rechenoperationen weitgehend ihres abstrakt-mathematischen Gehalts entkleidet. Der Ablauf der Rechnung wird dabei in eine rein schematisch durchführbare „Verzifferungsaufgabe" übergeführt, die von angelernten Kräften — ein wesentlicher Gesichtspunkt im Zeichen des heutigen Mangels an ausgebildeten Fachkräften — durchgeführt werden kann.

2. Frequenzgleichung zusammengesetzter Systeme. a) Einfach gekoppelte Gebilde. Wir betrachten die beiden in Abb. 1 symbolisch dargestellten Gebilde *1* und *2*, die durch gleichfrequente harmonische Wechselkräfte mit der Amplitude Q_1 bzw. Q_2 zu erzwungenen Schwingungen mit den

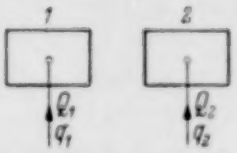


Abb. 1. Symbolische Darstellung wechselkrafterregter Schwingungsgebilde.

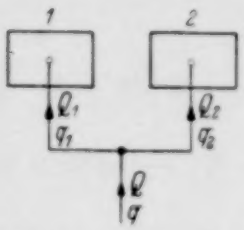


Abb. 2. Einfach gekoppelte wechselkrafterregte Gebilde.

Amplituden q_1 bzw. q_2 angeregt werden. Unter der Voraussetzung, daß die Gebilde linear und ungedämpft sind, gelten die beiden Amplitudenbeziehungen

$$q_1 = d_1 Q_1 , \qquad q_2 = d_2 Q_2 , \tag{1}$$

mit den im allgemeinen frequenzabhängigen Proportionalitätsfaktoren d_1 und d_2, die man als dynamische Einflußzahlen (im angelsächsischen Schrifttum als Receptance bzw. Admittance genannt) bezeichnet.

---

[1] Siehe etwa *H. Fuhrke*, Ing.-Arch. 23 (1955), S. 329, und *E. Pestel, G. Schumpich* und *S. Spierig*, VDI-Berichte 35 (1955), S. 11.

[2] *R. E. D. Bishop*, Proc. Inst. Mech. Engrs, 169 (1955) S. 1031, *T. G. Sofrin*, Journ. Aeron. Sciences, 13 (1946) S. 281.

[3] *R. E. D. Bishop* and *D. C. Johnson*, Vibration Analysis Tables, Cambridge 1956.

Werden nun die beiden Gebilde gemäß Abb. 2 an den bezeichneten Punkten starr miteinander gekoppelt, dann müssen die beiden Gleichungen gelten

$$q_1 = q_2 = q\,, \qquad Q_1 + Q_2 = Q\,. \tag{2}$$

Mit (1) folgt daraus

$$\left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}\right) q = Q\,. \tag{3}$$

Die Amplitude der Erregerkraft Q ist frequenzabhängig. Im Resonanzfall ist $Q = 0$; damit folgt die Resonanzbedingung unmittelbar zu

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = 0\,, \qquad \text{bzw.} \qquad d_1 + d_2 = 0\,. \tag{4}$$

Diese Gleichung stellt die Frequenzgleichung des gekoppelten Gebildes dar, aus der sich die Eigenfrequenzen ausrechnen lassen.

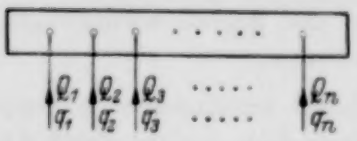


Abb. 3. Schwingungsgebilde mit mehreren Erregerkräften.

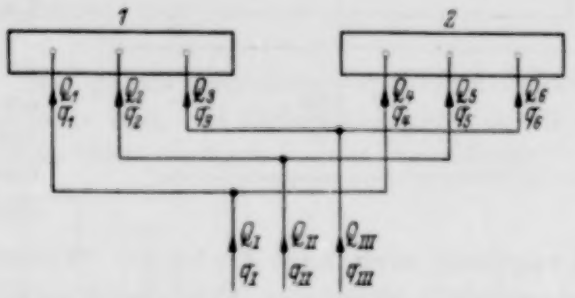


Abb. 4. Mehrfache Kopplung zweier Schwingungsgebilde.

b) Mehrfache Kopplung. Greifen an einem ungedämpften linearen Gebilde mehrere, beispielsweise n, gleichfrequente harmonische Erregerkräfte an (siehe Abb. 3), dann werden die Schwingungsamplituden der n Kraftangriffspunkte durch die n linearen Gleichungen

$$q_i = d_{i1}\,Q_1 + d_{i2}\,Q_2 + \cdots d_{in}\,Q_n \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{5}$$

beschrieben, die sich durch die Matrizengleichung

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{D} \cdot \mathfrak{Q} \tag{6}$$

ausdrücken lassen. $\mathfrak{D}$ ist dabei die Matrix der dynamischen Einflußzahlen, die wir kurz Deformationsmatrix nennen wollen.

Koppelt man nun zwei Gebilde dieser Art in der in Abb. 4 symbolisch angedeuteten Form, dann läßt sich für jedes Teilgebilde eine derartige Gleichung anschreiben. Mit den Setzungen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{q}_1 &= \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{Q}_1 = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{q}_2 &= \begin{pmatrix} q_4 \\ q_5 \\ q_6 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{Q}_2 = \begin{pmatrix} Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{pmatrix}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

erhalten wir dann

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{q}_1 &= \mathfrak{D}_1\,\mathfrak{Q}_1\,, \\ \mathfrak{q}_2 &= \mathfrak{D}_2\,\mathfrak{Q}_2\,. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Bezeichnet man die Amplituden der von außen her einwirkenden (gleichfrequenten) Erregerkräfte mit Q_{I}, Q_{II}, Q_{III}, die Schwingweg-Amplituden der Kraftangriffspunkte mit q_{I}, q_{II}, q_{III}, und setzt man weiterhin

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{q} &= \begin{pmatrix} q_{\mathrm{I}} \\ q_{\mathrm{II}} \\ q_{\mathrm{III}} \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{Q} = \begin{pmatrix} Q_{\mathrm{I}} \\ Q_{\mathrm{II}} \\ Q_{\mathrm{III}} \end{pmatrix}, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

so lassen sich die aus der Abb. 4 ablesbaren Verknüpfungsbedingungen durch die beiden Matrizengleichungen

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{q}_1 &= \mathfrak{q}_2 = \mathfrak{q}\,, \\ \mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_2 &= \mathfrak{Q} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

ausdrücken.

Resonanz liegt wieder dann vor, wenn $\mathfrak{Q} = 0$, also gemäß (10)

$$\mathfrak{Q}_1 = -\,\mathfrak{Q}_2 \tag{11a}$$

ist. Wegen $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2 = \mathfrak{q}$ ergibt sich damit aus (8) die Resonanzbedingung

$$\mathfrak{D}_1\,\mathfrak{Q}_1 = -\,\mathfrak{D}_2\,\mathfrak{Q}_1 \tag{11b}$$

oder

$$(\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2)\,\mathfrak{Q}_1 = 0\,. \tag{12}$$

Diese Bedingungsgleichung besitzt dann nichttriviale Lösungen für $\mathfrak{Q}_1$ bzw. $\mathfrak{Q}_2$, wenn

$$\det(\mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2) = 0 \tag{13}$$

ist. Die Auswertung dieser Determinantenbeziehung liefert die Frequenzgleichung des zusammengesetzten Gebildes, aus der die Eigenschwingungszahlen berechnet werden können.

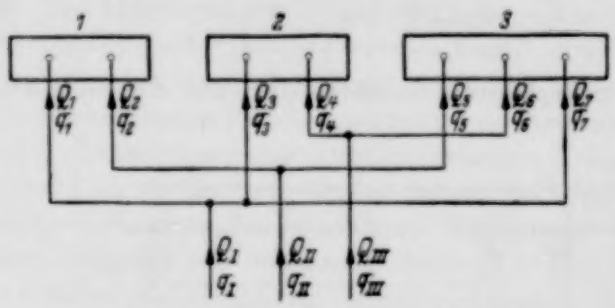


Abb. 5. Mehrere mehrfach gekoppelte Gebilde

c) Kopplung mehrerer Gebilde. Werden mehrere Gebilde miteinander gekoppelt, dann bestehen analoge Beziehungen. Betrachten wir beispielsweise das in Abb. 5 symbolisch dargestellte, aus drei linearen Teilgebilden bestehende System. Für jedes Teilgebilde gilt eine Gleichung der Form (6), die sich, umgeformt, durch

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{D}^{-1}\,\mathfrak{q} \tag{14a}$$

darstellen läßt. Die Kehrmatrix einer Deformationsmatrix hat die Bedeutung einer Steifigkeitsmatrix. Wir setzen deshalb

$$\mathfrak{C} \equiv \mathfrak{D}^{-1} = \text{Matrix der dynamischen Steifigkeitszahlen} \tag{14b}$$

und können damit die für die drei Teilgebilde geltenden Beziehungen durch

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{Q}_1 &= \mathfrak{C}_1\,\mathfrak{q}_1\,, \\ \mathfrak{Q}_2 &= \mathfrak{C}_2\,\mathfrak{q}_2\,, \\ \mathfrak{Q}_3 &= \mathfrak{C}_3\,\mathfrak{q}_3 \end{aligned}\right\} \tag{14c}$$

ausdrücken. Die den Amplituden der Schwingungswege bzw. Erregerkräfte durch die Kopplung auferlegten Verknüpfungsbedingungen lassen sich unmittelbar dem Kopplungsschema (Abb. 5) entnehmen:

$$\left.\begin{aligned} q_1 = q_3 = q_7 &= q_{\mathrm{I}}\,, \\ q_2 = q_5 &= q_{\mathrm{II}}\,, \\ q_4 = q_6 &= q_{\mathrm{III}}\,, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned} Q_1 + Q_3 + Q_7 &= Q_{\mathrm{I}}\,, \\ Q_2 + Q_5 &= Q_{\mathrm{II}}\,, \\ Q_4 + Q_6 &= Q_{\mathrm{III}}\,. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Geht man nun mit (14c) und (15) in (16) ein, so erhält man ein System linearer Gleichungen, das mit den Setzungen

$$\bar{\mathfrak{q}} = \begin{pmatrix} q_{\mathrm{I}} \\ q_{\mathrm{II}} \\ q_{\mathrm{III}} \end{pmatrix}, \qquad \bar{\mathfrak{Q}} = \begin{pmatrix} Q_{\mathrm{I}} \\ Q_{\mathrm{II}} \\ Q_{\mathrm{III}} \end{pmatrix}, \tag{17}$$

durch die Matrizengleichung

$$\bar{\mathfrak{Q}} = \bar{\mathfrak{C}}\,\bar{\mathfrak{q}} \tag{18}$$

dargestellt werden kann. $\bar{\mathfrak{C}}$ ist dabei die auf die Kopplungspunkte bezogene Matrix der dynamischen Steifigkeitszahlen des Gesamtsystems, die wir kurz Steifigkeitsmatrix nennen wollen.

Resonanz tritt bei $\bar{\mathfrak{Q}} = 0$, also

$$\bar{\mathfrak{C}}\,\bar{\mathfrak{q}} = 0 \tag{19}$$

auf; nichttriviale Lösungen $\bar{\mathfrak{q}}$ bestehen dabei nur dann, wenn

$$\det \bar{\mathfrak{C}} = 0 \tag{20}$$

wird. Durch (20) ist die Frequenzgleichung gegeben, aus der sich die gesuchten Eigenfrequenzen des gekoppelten Gebildes berechnen lassen.

Der vorbeschriebene Rechnungsgang erfordert, insbesondere dann, wenn ein Gebilde mit einer Vielzahl von Kopplungen vorliegt, einen erheblichen Anteil algebraischer Berechnungsarbeit. Der Aufwand an geistiger Arbeit zur Bewältigung dieser Aufgabe kann, wie schon eingangs erwähnt, durch Anwendung der Matrizenrechnung in Form einer Matrizen-Transformation bemerkenswert verringert werden.

Dieses Verfahren, das beispielsweise in der Elektrotechnik bei der Berechnung elektrischer Netzwerke allgemein angewendet wird[1], soll hier kurz erläutert werden.

3. Verknüpfungsmatrix und Steifigkeitsmatrix. Wir gehen von dem vorstehend behandelten, in Abb. 5 symbolisch dargestellten gekoppeltem Gebilde aus, und ziehen zunächst die für die drei Einzelgebilde geltenden Matrizengleichungen (14c) zu einer einzigen Matrizengleichung

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{Q}_1 \\ \mathfrak{Q}_2 \\ \mathfrak{Q}_3 \end{pmatrix} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathfrak{C}_1 & & \\ \hline & \mathfrak{C}_2 & \\ \hline & & \mathfrak{C}_3 \\ \hline \end{array} \cdot \begin{pmatrix} \mathfrak{q}_1 \\ \mathfrak{q}_2 \\ \mathfrak{q}_3 \end{pmatrix} \tag{21a}$$

zusammen, die mit den Setzungen[2]

$$\mathfrak{Q} = \begin{pmatrix} \mathfrak{Q}_1 \\ \mathfrak{Q}_2 \\ \mathfrak{Q}_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \vdots \\ Q_7 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{q} = \begin{pmatrix} \mathfrak{q}_1 \\ \mathfrak{q}_2 \\ \mathfrak{q}_3 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_7 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{C} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathfrak{C}_1 & & \\ \hline & \mathfrak{C}_2 & \\ \hline & & \mathfrak{C}_3 \\ \hline \end{array} \tag{21b}$$

in die Form

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{C}\,\mathfrak{q} \tag{21c}$$

gebracht werden kann.

Wir stellen uns nun die Aufgabe, eine Matrizen-Transformation aufzusuchen, mittels der die durch einfaches Nebeneinandersetzen der Teilmatrizen gefundene Matrix $\mathfrak{C}$ in die dynamische Deformationsmatrix $\bar{\mathfrak{C}}$ des gekoppelten Gebildes [siehe Gleichung (18)] übergeführt wird. Zu diesem Zweck schreiben wir die zwischen den Elementen der Spaltenvektoren $\mathfrak{q}$ und $\bar{\mathfrak{q}}$ bestehenden, bereits in (15) dargestellten Verknüpfungsbeziehungen in einem etwas abgeänderten Schema an:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= q_{\mathrm{I}} + 0 + 0\,, \\ q_2 &= 0 + q_{\mathrm{II}} + 0\,, \\ q_3 &= q_{\mathrm{I}} + 0 + 0\,, \\ q_4 &= 0 + 0 + q_{\mathrm{III}}\,, \\ q_5 &= 0 + q_{\mathrm{II}} + 0\,, \\ q_6 &= 0 + 0 + q_{\mathrm{III}}\,, \\ q_7 &= q_{\mathrm{I}} + 0 + 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{22a}$$

Dieses Gleichungssystem läßt sich mit der Setzung (17) durch die Matrizengleichung

$$\mathfrak{q} = \boldsymbol{\Phi}\,\bar{\mathfrak{q}}\,, \tag{22 b}$$

die eine auf den Spaltenvektor $\mathfrak{q}$ angewendete Matrizen-Transformation darstellt, ausdrücken.

[1] *G. Kron*, Tensor Analysis of Networks, New York 1949.
[2] Die leeren Felder in der Matrix $\mathfrak{C}$ sind mit Nullen besetzt zu denken.

Die Transformationsmatrix Φ, die als Verknüpfungsmatrix bezeichnet wird, kann unmittelbar aus (22a) abgelesen werden [1]:

$$\Phi = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & & \\ \hline & 1 & \\ \hline 1 & & \\ \hline & & 1 \\ \hline & 1 & \\ \hline & & 1 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array} . \tag{22c}$$

Eine kurze Betrachtung der zwischen den Erregerkraftquellen und dem Koppelgebilde ausgetauschten Energie führt zu der Feststellung, daß die von den Erregerkräften in das gekoppelte System eingespeiste Blindleistung (mit ω = Erregerkraft-Kreisfrequenz)

$$\bar{N}_{\mathrm{BI}} = \frac{1}{2}\,\omega\,(Q_{\mathrm{I}}\,q_{\mathrm{I}} + Q_{\mathrm{II}}\,q_{\mathrm{II}} + Q_{\mathrm{III}}\,q_{\mathrm{III}})\,, \tag{23a}$$

bzw. in Matrizenschreibweise (mit (17))

$$\bar{N}_{\mathrm{BI}} = \frac{1}{2}\,\omega\,\bar{\mathfrak{q}}'\,\bar{\mathfrak{Q}}\,, \tag{23b}$$

wobei $\bar{\mathfrak{q}}'$ in der üblichen Schreibweise den zu $\bar{\mathfrak{q}}$ transpornierten Vektor bedeutet, gleich der Summe der in die Teilgebilde eingespeisten Blindleistungen

$$N_{\mathrm{BI}} = \frac{1}{2}\,\omega\,(Q_1\,q_1 + Q_2\,q_2 + \cdots Q_7\,q_7)\,, \tag{24a}$$

oder mit (21b)

$$N_{\mathrm{BI}} = \frac{1}{2}\,\omega\,\mathfrak{q}'\,\mathfrak{Q}\,, \tag{24b}$$

sein muß.
Daraus folgt sofort

$$\bar{\mathfrak{q}}'\,\bar{\mathfrak{Q}} = \mathfrak{q}'\,\mathfrak{Q}\,. \tag{25}$$

Nun wenden wir auf den durch (21b) definierten Spaltenvektor $\mathfrak{q}$ die in (22b) dargestellte Transformation an, erhalten

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{C}\,\Phi\,\bar{\mathfrak{q}} \tag{26a}$$

und multiplizieren diese Gleichung von links her mit der Transponierten Φ':

$$\Phi'\,\mathfrak{Q} = \Phi'\,\mathfrak{C}\,\Phi\,\bar{\mathfrak{q}}\,. \tag{26b}$$

Mit der zu (22b) transponierten Form

$$\mathfrak{q}' = \bar{\mathfrak{q}}'\,\Phi'\,, \tag{27}$$

gehen wir in (25) ein

$$\bar{\mathfrak{q}}'\,\bar{\mathfrak{Q}} = \bar{\mathfrak{q}}'\,\Phi'\,\mathfrak{Q}\,. \tag{28a}$$

Mit (26a) folgt daraus

$$\bar{\mathfrak{q}}'\,\bar{\mathfrak{Q}} = \bar{\mathfrak{q}}'\,\Phi'\,\mathfrak{C}\,\Phi\,\bar{\mathfrak{q}}\,, \tag{28b}$$

oder

$$\bar{\mathfrak{Q}} = \Phi'\,\mathfrak{C}\,\Phi\cdot\bar{\mathfrak{q}}\,. \tag{28c}$$

Ein Vergleich dieses Ergebnisses mit (18) liefert sofort die gesuchte, auf die Matrix $\bar{\mathfrak{C}}$ anzuwendende Matrizen-Transformation

$$\bar{\mathfrak{C}} = \Phi'\,\mathfrak{C}\,\Phi\,. \tag{29}$$

Die Verknüpfungsmatrix Φ ist denkbar einfach aufgebaut. Sie besteht nur aus Einsen und Nullen. Damit wird auch die in (29) dargestellte Transformation leicht durchführbar und läuft letzten Endes auf eine Summenbildung der Elemente der Teilmatrizen $\mathfrak{C}_i$ in den Elementen von $\bar{\mathfrak{C}}$ hinaus.

[1] Die leeren Felder in Φ sind mit Nullen besetzt zu denken.

Die Durchführung der Rechnung kann durch eine geschickte Anordnung der die Verknüpfungsbedingungen beschreibenden Gleichungen unter Umständen wesentlich vereinfacht werden, wenn es nämlich gelingt, die Verknüpfungsmatrix Φ so aufzubauen, daß möglichst viele Einheitsmatrizen in ihr enthalten sind (siehe Abb. 9e).

$\overline{\mathfrak{C}}$ ist eine quadratische Matrix, deren Ordnungszahl n (= Anzahl der Kopplungsstellen) völlig unabhängig ist von der Zahl der Freiheitsgrade der beteiligten Teilgebilde.

Beispielsweise ist für das in Abb. 5 dargestellte System $n = 3$; dabei kann es sich bei den beiden gekoppelten Teilgebilden um Gebilde mit beliebig vielen Freiheitsgraden handeln (im Extremfall unendlich viele, wenn es kontinuierliche Gebilde sind).

Abschließend wäre noch zu ergänzen, daß die Amplituden q_i bzw. Q_i verallgemeinerte Koordinaten bzw. verallgemeinerte Kräfte sind; d. h., sie können sowohl Wege bzw. Kräfte, als auch Drehwinkel bzw. Drehmomente (durch passend gewählte Bezugslängen homogen gemacht) darstellen.

Die durch (20) zum Ausdruck gebrachte Resonanzbedingung wird sich nur in den seltensten Fällen in allgemeiner Form geschlossen auswerten lassen. Zweckmäßigerweise wird man hierzu das bekannte Restgrößenverfahren anwenden, indem man eine passende Kreisfrequenz ω wählt und den dazu gehörenden Wert $\det \overline{\mathfrak{C}}$ ausrechnet. Man wiederholt die Rechnung mit abgeänderten Werten von ω, trägt die Werte $\det \overline{\mathfrak{C}}$ in einem Koordinatensystem über ω auf und bestimmt die Nullstellen der sich ergebenden Funktionslinie.

Bei der Ausrechnung von $\det \overline{\mathfrak{C}}$ kann man sich mit Vorteil, insbesondere bei großen Ordnungszahlen n, der bekannten, aus dem *Gauß*schen Algorithmus hergeleiteten Verfahren[1] bedienen.

4. Bestimmung der dynamischen Einflußzahlen. a) Kontinuierliche Gebilde. Bei der vorliegenden Betrachtung wollen wir uns aus Raumgründen auf reine Biegeschwingungsgebilde beschränken. Die hierbei gewonnenen Ergebnisse lassen sich analog auf Längs- und Drehschwingungsgebilde, bzw. auf Gebilde mit gekoppelten Biege- und Verdrehungsschwingungen, übertragen.

Greifen an einem Biegestab zeitlich harmonisch veränderliche, verteilte Belastungskräfte und -Momente gleicher Frequenz an, deren Amplitudenfunktionen $p(x)$ und $M(x)$ seien, dann kann die Gleichung für die Schwingungsform in bekannter Weise quellenmäßig (mit u als Parameter) durch

$$y(x) = \int_l G_P(x, u)\,[p(u) + \lambda\,\varrho(u)\,y(u)]\,du + \int_l G_M(x, u)\,M(u)\,du \tag{30}$$

ausgedrückt werden (die hierbei zugrundegelegten positiven Zählrichtungen der Größen $y(x)$, $p(x)$ und $M(x)$ sind aus Abb. 6 zu ersehen). Die in obiger Gleichung verwendeten Größen bedeuten:

$G_P(x, u)$ die *Green*sche Funktion für die Belastungskräfte,
$G_M(x, u)$ die *Green*sche Funktion für die belastenden Biegemomente,
$\varrho(x)$ die Massenbelegung des Biegestabes,
$\lambda = \omega^2$ (ω = Erregerkraft-Kreisfrequenz).

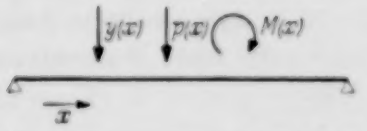


Abb. 6. Biegungsträger mit Zählpfeilen

Aufgrund des Entwicklungssatzes läßt sich die Amplitudenfunktion $y(x)$ als Summe

$$y(x) = \sum_{s=1}^{\infty} k_s\,{}^s y(x)\,, \tag{30a}$$

mit den k_s als Entwicklungskoeffizienten (die man als Normalkoordinaten oder generalisierte Koordinaten bezeichnet), und den ${}^s y(x)$ als Eigenfunktionen, ansetzen. Mit diesem Ansatz gehen wir in (30) ein; dann multiplizieren wir diese Gleichung mit $\varrho(x)\,{}^r y(x)$ und erhalten daraus nach einer Integration über die gesamte Länge des Gebildes

$$\int_l \left(\sum_{s=1}^{\infty} k_s\,{}^s y(x)\right) \varrho(x)\,{}^r y(x)\,dx = \int_l \left[\int_l G_P(x, u)\,{}^r y(x)\,\varrho(x)\,dx\right] p(u)\,du$$

$$+ \lambda \int_l \left[\sum_{s=1}^{\infty} k_s \int_l G_P(x, u)\,\varrho(u)\,{}^s y(u)\,du\right] \varrho(x)\,{}^r y(x)\,dx + \int_l \left[\int_l G_M(x,u)\,\varrho(x)\,{}^r y(x)\,dx\right] M(u)\,du\,. \tag{30b}$$

Unter Beachtung der Orthogonalitätsrelationen

$$\int_l \varrho(x)\,{}^s y(x)\,{}^r y(x)\,dx = 0 \qquad (r \neq s)\,, \tag{30c}$$

[1] Siehe etwa *R. Zurmühl*, Matrizen, Seite 62, 2. Aufl., Berlin, Göttingen, Heidelberg 1950.

und der für den Fall der r-ten Eigenschwingung geltenden Gleichung

$$ {}^{r}y(u) = \lambda_r \int_l G_P(x, u)\, \varrho(x)\, {}^{r}y(x)\, dx \tag{30d} $$

sowie der aus der Elastizitätslehre her bekannten Beziehung

$$ G_M(x, u) = G'_P(u, x)\,, \tag{30e} $$

mit $G'_P(u, x)$ als Einflußfunktion für die Neigung der elastischen Linie eines Biegeträgers infolge einer Belastung durch eine Einzelkraft, erhalten wir nach teilweiser Integration schließlich, wenn anschließend an Stelle des Parameters u wieder x gesetzt wird,

$$ k_r \int_l \varrho(x)\, {}^{r}y^2(x)\, dx = \frac{1}{\lambda_r} \int_l {}^{r}y(x)\, p(x)\, dx + \frac{\lambda}{\lambda_r} k_r \int_l \varrho(x)\, {}^{r}y^2(x)\, dx + \frac{1}{\lambda_r} \int_l {}^{r}y'(x)\, M(x)\, dx\,. \tag{30f} $$

Durch den hochgestellten Akzent bei ${}^{r}y'(x)$ soll hier in bekannter Weise die erste Ableitung nach der unabhängigen Veränderlichen x gekennzeichnet werden.

Mit den Setzungen

$$ \left.\begin{aligned} \mu_r &= \int_l \varrho(x)\, {}^{r}y^2(x)\, dx \text{ als } r\text{-te generalisierte Masse,} \\ {}^{r}K_P &= \int_l {}^{r}y(x)\, p(x)\, dx \text{ als } r\text{-te generalisierte Kraft, herrührend von den Belastungskräften,} \\ {}^{r}K_M &= \int_l {}^{r}y'(x)\, M(x)\, dx \text{ als } r\text{-te generalisierte Kraft, herrührend von den Belastungsmomenten,} \end{aligned}\right\} \tag{30g} $$

erhalten wir nach Auflösung nach den Entwicklungskoeffizienten

$$ k_r = \frac{{}^{r}K_P + {}^{r}K_M}{\mu_r (\lambda_r - \lambda)} \qquad (r = 1, 2, 3, \ldots)\,. \tag{31} $$

Gehen wir mit diesen Lösungen in (30a) ein, so ergibt sich die gesuchte Amplitudenfunktion $y(x)$ und ihre Ableitung nach x zu

und

$$ \left.\begin{aligned} y(x) &= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{{}^{r}K_P + {}^{r}K_M}{\mu_r (\lambda_r - \lambda)}\, {}^{r}y(x)\,, \\ y'(x) &= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{{}^{r}K_P + {}^{r}K_M}{\mu_r (\lambda_r - \lambda)}\, {}^{r}y'(x)\,. \end{aligned}\right\} \tag{32} $$

Für den Fall, daß das Gebilde nicht von stetig verteilten Kräften bzw. Momenten, sondern von n harmonischen gleichfrequenten Einzelkräften bzw. m Einzelmomenten erregt wird, nehmen die in (30g) dargestellten Ausdrücke für die generalisierten Kräfte, wenn wir die Lagekoordinaten der Kraft- bzw. Momentenangriffspunkte mit x_k bezeichnen, die Formen

$$ \left.\begin{aligned} {}^{r}K_P &= \sum_{k=1}^{n} P_k\, {}^{r}y(x_k) \\ {}^{r}K_M &= \sum_{k=1}^{m} M_k\, {}^{r}y'(x_k) \end{aligned}\right\} \quad (r = 1, 2, 3, \ldots) \tag{33} $$

an.

Die in einem durch die Lagekoordinate x_j gekennzeichneten Punkt herrschende Schwingungsamplitude erhält man durch Einsetzen von (33) in (32). Werden dabei die Summanden in den entstehenden Doppelsummen umgruppiert, so folgt, wenn gleichzeitig durch Einführung einer passend zu wählenden Bezugslänge l_0 auf homogenisierte Kräfte übergegangen wird,

$$ y(x_j) = \sum_{k=1}^{n} P_k \sum_{r=1}^{\infty} \frac{{}^{r}y(x_k)\, {}^{r}y(x_j)}{\mu_r (\lambda_r - \lambda)} + \sum_{k=1}^{m} \frac{M_k}{l_0}\, l_0 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{{}^{r}y'(x_k)\, {}^{r}y(x_j)}{\mu_r (\lambda_r - \lambda)}\,. \tag{34a} $$

Analog dazu erhält man die Neigung der Eigenschwingungslinie an der Stelle x_j (in homogener Form) zu

$$ l_0 y'(x_j) = \sum_{k=1}^{n} P_k\, l_0 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{{}^{r}y(x_k)\, {}^{r}y'(x_j)}{\mu_r (\lambda_r - \lambda)} + \sum_{k=1}^{m} \frac{M_k}{l_0}\, l_0^2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{{}^{r}y'(x_k)\, {}^{r}y'(x_j)}{\mu_r (\lambda_r - \lambda)}\,. \tag{34b} $$

Ein Vergleich mit (5) zeigt unmittelbar die physikalische Bedeutung der bei den P_k bzw. M_k/l_0 stehenden Summen: sie stellen dynamische Einflußzahlen dar.

Ist x_j die Lagekoordinate jenes Punktes, in dem die Schwingungsamplitude $y(x_j)$ herrscht und x_k die des Angriffspunktes einer Erregerkraft P_k bzw. M_k/l_0, dann ergibt sich die auf diese Punkte bezogene dynamische Einflußzahl zu

$$\left.\begin{aligned} \bar{d}_{jk} &= \sum_{r=1}^{\infty} \frac{{}^r y(x_k)\ {}^r y(x_j)}{\mu_r (\lambda_r - \lambda)} \quad \text{(für die Kraft } P_k\text{)}, \\ \text{bzw.} \\ \bar{d}_{jk} &= l_0 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{{}^r y'(x_k)\ {}^r y(x_j)}{\mu_r (\lambda_r - \lambda)} \quad \text{(für die homogenisierte Kraft } M_k/l_0\text{)}. \end{aligned}\right\} \tag{35a}$$

Analog erhalten wir aus (34b) die durch

$$\bar{d}'_{jk} = \frac{l_0 y'(x_j)}{P_k} \qquad \text{und} \qquad \bar{d}'_{jk} = \frac{l_0 y'(x_j)}{M_k/l_0} \tag{35b}$$

definierten, auf die Punkte x_j und x_k bezogenen dynamischen Einflußzahlen für die Neigung der Eigenschwingungslinie:

$$\left.\begin{aligned} \bar{d}'_{jk} &= l_0 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{{}^r y(x_k)\ {}^r y'(x_j)}{\mu_r (\lambda_r - \lambda)}, \\ \bar{d}'_{jk} &= l_0^2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{{}^r y'(x_k)\ {}^r y'(x_j)}{\mu_r (\lambda_r - \lambda)}. \end{aligned}\right\} \tag{35c}$$

Aus den entwickelten Gleichungen können die bekannten Reziprozitätsrelationen

$$\bar{d}_{jk} = \bar{d}_{kj}, \qquad \bar{d}'_{jk} = \bar{d}'_{kj}, \qquad \bar{d}_{jk} = \bar{d}'_{kj}, \tag{35d}$$

leicht abgelesen werden.

Im allgemeinen konvergieren die Summen auf den rechten Seiten der obigen Gleichungen ziemlich rasch, so daß man sie, abhängig vom Grad der geforderten Genauigkeit, bei Gliedern verhältnismäßig niedriger Ordnungszahl, diese werde mit f bezeichnet, abbrechen kann. Physikalisch bedeutet dies, daß das der Berechnung vorliegende Gebilde durch ein aus diskreten Massen und Federn bestehendes Ersatzgebilde von f Freiheitsgraden approximiert werden kann.

α) Ersatzgebilde. Für das vorstehend erwähnte approximierende Ersatzgebilde von f Freiheitsgraden lassen sich f Eigenvektoren

$${}^r\underline{\mathfrak{x}} = \begin{pmatrix} {}^r y(x_1) \\ {}^r y(x_2) \\ \vdots \\ {}^r y(x_n) \end{pmatrix} \qquad (r = 1, 2, \cdots f) \tag{36a}$$

angeben, deren Elemente die Schwingweg-Amplituden der n Bezugspunkte x_k in den f Eigenformen sind, die man zu einer $(n\,f)$ Matrix (Matrix der verkürzten Eigenvektoren) zusammenziehen kann:

$$\mathfrak{X}^* \equiv ({}^1\underline{\mathfrak{x}}, {}^2\underline{\mathfrak{x}}, \ldots {}^f\underline{\mathfrak{x}}). \tag{36b}$$

Dabei muß aus physikalischen Gründen die Anzahl der (an sich nur durch die geforderte Genauigkeit festzulegenden) Freiheitsgrade f stets größer als (oder zumindest gleich) n sein.

Mit (36b) kann beispielsweise die für die Kräfte P_k geltende Deformationsmatrix $\mathfrak{D}_P$, deren Elemente durch (35a) bestimmt sind, als Matrizenprodukt in der für das numerische Rechnen bequemen Form

$$\mathfrak{D}_P = \mathfrak{X}^* \left[\frac{1}{\mu_r (\lambda_r - \lambda)}\right] \mathfrak{X}^{*\prime} \tag{36c}$$

angeschrieben werden.
Es ist dabei

$\mathfrak{D}_P$ eine $(n\,n)$ Matrix,
$\mathfrak{X}^*$ eine $(n\,f)$ Matrix ($\mathfrak{X}^{*\prime}$ ist ihre Transponierte),
[ ] eine diagonale $(f\,f)$ Matrix, die also mit Nullen in den nichtdiagonalen Elementen besetzt ist.

β) **Steifigkeitsmatrix.** Die Matrix der dynamischen Steifigkeitszahlen ist gemäß (14b) die Kehrmatrix der Deformationsmatrix. Für den meist immer vorliegenden Fall $f \neq n$ ist eine geschlossene Darstellung von $\mathfrak{C}$ in allgemeiner Form aus (36c), was für die weitere Rechnung sehr nützlich wäre, wegen der Rechteckform von $\mathfrak{X}^*$ leider nicht möglich. Man muß deshalb zu jedem gewählten Wert λ die Deformationsmatrix berechnen und daraus erst die Kehrmatrix bestimmen. Die dadurch bedingte Erschwernis des Berechnungsganges ist jedoch im allgemeinen nicht allzugroß, da für gewöhnlich die Anzahl der an einem Teilgebilde vorhandenen Kopplungsstellen, und damit die Ordnungszahl n der Deformationsmatrix, immer verhältnismäßig niedrig ist.

b) **Sonderfälle.** Die Vorteile des beschriebenen Verfahrens treten dann besonders augenfällig in Erscheinung, wenn die Zerlegung so vorgenommen werden kann, daß Teilgebilde entstehen, deren Eigenwerte und Eigenschwingungsformen sich leicht berechnen lassen. Von den vielerlei Möglichkeiten seien nachstehend die wichtigsten Fälle kurz behandelt.

α) **Homogene stabförmige, biegungsbeanspruchte Gebilde.** Das Schwingungsverhalten dieser Gebilde wird in fast allen Lehr- bzw. Handbüchern behandelt, so daß die zu den verschiedenen Randbedingungen gehörenden Lösungen leicht aufgefunden werden können. Die Berechnung der durch (30g) definierten generalisierten Massen gestaltet sich für homogene Biegestäbe besonders einfach gemäß[1]

$$\mu_r = \frac{M}{4}\left({}^r y^2(l) - 2\,{}^r y'(l)\cdot {}^r y'''(l) + {}^r y''(l)\right), \tag{37a}$$

wobei M die Masse des Stabes, und ${}^r y(l)$ die Ordinate der r-ten Eigenschwingungsform an der Stelle $x = l$ ist. Die hochgestellten Akzente bei ${}^r y(l)$ bedeuten hierbei Ableitungen nach den Argumenten $\sigma_r \pi\, x/l$ der in den Eigenfunktionen (siehe Tabelle 1) vorkommenden transzendenten Funktionen, den bekannten *Rayleigh*funktionen.

Beispielsweise ist für den frei-freien Biegestab ${}^r y''(l) = 0$, ${}^r y'''(l) = 0$, so daß die generalisierte Masse durch

$$\mu_r = \frac{M}{4}\,{}^r y^2(l) \tag{37b}$$

gegeben ist.

Der Vollständigkeit halber sind in Tab. 1 die Eigenwerte, die Eigenschwingungsformen und die generalisierten Massen homogener Biegestäbe für die drei wichtigsten Lagerungsarten bis zur fünften Ordnung angegeben. Zu bemerken wäre hierzu noch, daß die in den Lösungen vorkommenden transzendenden Funktionen (*Rayleigh*funktionen) tabelliert vorliegen.[2]

β) **Starre Gebilde.** Ist ein Teilgebilde sehr viel steifer als die übrigen Teile des Gesamtsystems, dann kann man es, ohne einen allzu großen Fehler zu begehen, als vollkommen starr betrachten.

Wir gehen von einem starren plattenförmigen Körper aus, der frei von Bindungen an das feste Bezugssystem sei. Er besitze drei Freiheitsgrade, zufolge deren er Bewegungen in der y-Achse und Drehungen um die x-Achse bzw. z-Achse eines dreiachsigen raumfesten Koordinatensystems (mit dem Ursprung im Schwerpunkt des Körpers in der Ruhelage) ausführen kann.

Unter diesen Voraussetzungen besitzt der Körper nur den einzigen, allerdings dreifach zu zählenden, Eigenwert $\lambda = 0$, mit den zugehörigen Eigenfunktionen

$${}^{01}y(x, z) = 1\,, \qquad {}^{02}y(x, z) = x/l_0\,, \qquad {}^{03}y(x, z) = z/l_0\,, \tag{38a}$$

und l_0 als passend zu wählender Bezugslänge. Die zu diesen Eigenfunktionen gehörenden generalisierten Massen ergeben sich gemäß (30g) zu

$$\mu_{01} = M\,, \qquad \mu_{02} = \Theta_z/l_0^2\,, \qquad \mu_{03} = \Theta_x/l_0^2\,, \tag{38b}$$

mit M = Masse des Körpers
Θ_z = Massenträgheitsmoment des Körpers, bezogen auf die z-Achse
Θ_x = desgl., bezogen auf die x-Achse des Koordinatensystems.

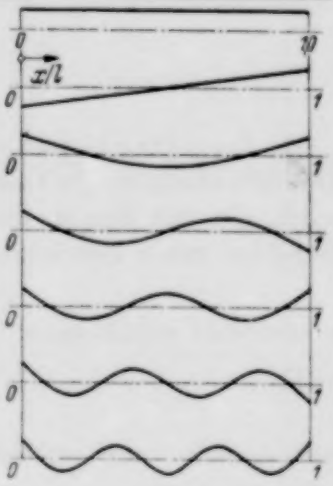
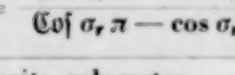
---

[1] *Lord Rayleigh*, Theorie of Sound, Bd. 1, Seite 256, London 1894.

[2] Siehe *K. Hohenemser* u. *W. Prager*, Dynamik der Stabwerke, Seite 323, Berlin 1933, sowie die unter Fußnote 3 auf Seite 134 angeführte Arbeit, in der auch die Eigenschwingungsformen mit ihren Ableitungen für homogene Biegungsstäbe bis zur Ordnungszahl 5 für die technisch wichtigsten Lagerungsarten tabelliert angegeben sind.

Tabelle 1

$$\lambda_r \equiv \omega_r^2 = \sigma_r^4 \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \frac{E\,J}{m} \qquad {}^r y(x) = A_r\,(B(x) - C_r\,D(x))$$

	r	$\sigma_r \cdot \pi$	μ_r	C_r	A_r	Schwingungsform
Frei-freier Biegeträger	0_1	0	M	—	1/2	
	0_2	0	$M/3$	—	$\frac{x}{l} - \frac{1}{2}$	
	1	4,730 04	M	0,982 502	1	
$B(x) = \mathfrak{Cof}\,\frac{\sigma_r \pi}{l} x + \cos\frac{\sigma_r \pi}{l} x$	2	7,853 20	M	1,000 777	1	
	3	10,995 6	M	0,999 967	1	
$D(x) = \mathfrak{Sin}\,\frac{\sigma_r \pi}{l} x + \sin\frac{\sigma_r \pi}{l} x$	4	14,137 2	M	1,000 002	1	
$C_r = \frac{\mathfrak{Cof}\,\sigma_r \pi - \cos\sigma_r \pi}{\mathfrak{Sin}\,\sigma_r \pi - \sin\sigma_r \pi}$	5	17,278 8	M	0,999 999	1	
Einseitig eingespannter Biegeträger	1	1,875 10	M	0,734 096	1	
	2	4,694 09	M	1,018 466	1	
$B(x) = \mathfrak{Cof}\,\frac{\sigma_r \pi}{l} x - \cos\frac{\sigma_r \pi}{l} x$	3	7,854 76	M	0,999 225	1	
$D(x) = \mathfrak{Sin}\,\frac{\sigma_r \pi}{l} x - \sin\frac{\sigma_r \pi}{l} x$	4	10,995 5	M	1,000 034	1	
$C_r = \frac{\mathfrak{Sin}\,\sigma_r \pi - \sin\sigma_r \pi}{\mathfrak{Cof}\,\sigma_r \pi - \cos\sigma_r \pi}$	5	14,137 2	M	0,999 999	1	
Beiderseits gelagerter Biegeträger	$\lambda_r \equiv \omega_r^2 = r^4 \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 \frac{E\,J}{m}$, $\mu_r = M/2$				${}^r y(x) = \sin\frac{r\pi}{l} x$	

M = Masse des Biegeträgers; EJ = Biegesteife; l = Länge des Biegeträgers; $m = M/l$

Greift in dem durch die Koordinaten x_k, z_k gekennzeichneten Punkt des Körpers eine in Richtung der y-Achse wirkende harmonische Wechselkraft P_k an, und wird die in einem Punkt mit den Koordinaten x_j, z_j gemessene Schwingweg-Amplitude mit $y(x_j, z_j)$ bezeichnet, dann ergibt sich die durch

$$\bar{d}_{jk} = y(x_j, z_j)/P_k \tag{39a}$$

definierte dynamische Einflußzahl gemäß (35) zu

$$\bar{d}_{jk} = -\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{M} + \frac{x_j\,x_k}{\Theta_z} + \frac{z_j\,z_k}{\Theta_x}\right). \tag{39b}$$

Analog dazu ergeben sich die Einflußzahlen für harmonisch zeitlich veränderliche (homogenisierte) Momente M_x/l_0 bzw. M_z/l_0, die um die x-Achse bzw. z-Achse drehend wirken,

$$\bar{d}_{jx} = -\frac{z_j}{\lambda\,\Theta_x/l_0} \qquad \text{und} \qquad \bar{d}_{jz} = -\frac{x_j}{\lambda\,\Theta_z/l_0}, \tag{39c}$$

wobei dann definitionsgemäß

$$y(x_j\,z_j) = \sum \bar{d}_{jk}\,P_k + \bar{d}_{jx} \sum M_x/l_0 + \bar{d}_{jz} \sum M_z/l_0 \tag{40}$$

wird. Selbstverständlich hätte sich dieses Ergebnis auch aus den dynamischen Grundgleichungen herleiten lassen.

γ) **Massefreie elastische Gebilde.** Ist die Eigenmasse eines steifen Teilgebildes von vernachlässigbarer Größenordnung gegenüber den übrigen Massen des Gesamtsystems, dann kann man dieses Gebilde als masselos betrachten. Bei der Rechnung werden nur die elastischen Eigenschaften berücksichtigt.

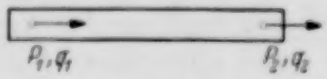


Abb. 7. Stabförmiges Gebilde, durch Längskräfte beansprucht.

1. **Zug-Druckbeanspruchte Gebilde.** Für das in Abb. 7 dargestellte, als masselos vorausgesetzte stabförmige Gebilde, das durch die beiden Kräfte P_1 und P_2 in seiner Längsachse belastet wird, gilt mit den in die Abbildung eingetragenen Bezeichnungen, wenn die Federkonstante des Gebildes mit c bezeichnet wird,

$$P_1 + P_2 = 0\,, \qquad P_2 = c\,(q_2 - q_1)\,; \tag{41a}$$

umgeformt erhält man

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= c\,q_1 - c\,q_2\,, \\ P_2 &= -c\,q_1 + c\,q_2\,, \end{aligned}\right\} \tag{41b}$$

woraus sofort die Steifigkeitsmatrix

$$\mathfrak{C} = c\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{41c}$$

des massefreien Stabes entnommen werden kann.

2. **Biegungsbeanspruchte Gebilde.** Zwischen den an einem Biegungsträger angreifenden n statischen Belastungskräften Q_k und den an den Kraftangriffspunkten auftretenden Verformungsgrößen y_j bestehen lineare Beziehungen, die mit den statischen Steifigkeitszahlen k_{jk} in bekannter Weise durch

$$Q_k = \sum_j k_{kj}\,y_j \qquad (k = 1, 2, \ldots n) \tag{42}$$

ausgedrückt werden können.

Nun entstehen bei der Unterteilung eines Systems zumeist Gebilde, die frei von Bindungen an das feste Bezugssystem sind. Es liegen dann frei-freie Biegungsträger vor, für die im Sinne der Statik keine Einflußzahlen, und damit keine Steifigkeitszahlen, angebbar sind.

Bedenkt man jedoch, daß es sich im vorliegenden Falle um schwingende Gebilde handelt, die auftretenden Kräfte und Verformungsgrößen daher Wechselgrößen sind, die wegen der vorausgesetzten Masselosigkeit (und Dämpfungsfreiheit) der Gebilde alle in Phase liegen, dann läßt sich sehr einfach eine Beziehung zwischen den Kräften und Schwingwegamplituden wie folgt herleiten

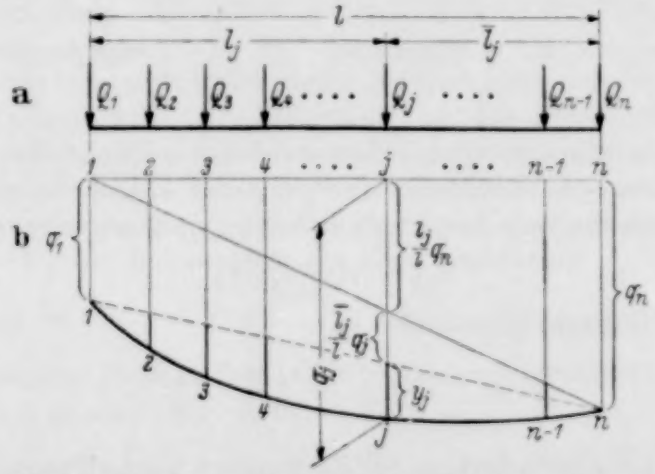


Abb. 8. Frei-freier masseloser Biegungsträger. — a) Belastungsschema; b) Momentanlage des verformten Gebildes.

Wir betrachten einen frei-freien Biegungsträger, an dem n gleichfrequente verallgemeinerte Wechselkräfte Q_k angreifen mögen (Abb. 8a). Die Schwingweg-Amplituden der Kraftangriffspunkte seien q_k, die Verformungsgrößen y_k. Da die am masselosen frei-freien Gebilde angreifenden Kräfte in jedem Augenblick ein Gleichgewichtssystem bilden, können wir zwei völlig willkürlich herausgegriffene Kräfte als Auflagerreaktionen, deren Angriffspunkte als (mitschwingende) Auflagerpunkte, betrachten.

Die Abb. 8b zeigt beispielsweise ein Gebilde dieser Art im ausgeschwungenen Zustand. Wenn wir die Punkte **1** und n als Auflagerpunkte wählen, dann liegt, im Sinne einer Momentanbetrachtung, ein zweifach gelagerter Biegungsträger vor, für den die Matrix der statischen Einflußzahlen a_{kj} und, durch Kehrwertbildung, die Matrix der statischen Steifigkeitszahlen k_{jk} mit Hilfe der elementaren Elastizitätsbeziehungen bestimmt werden können. Für die $n-2$ Kräfte $P_2, P_3, \ldots P_{n-1}$ lassen sich dann die $n-2$ Gleichungen

$$P_k = \sum_{j=2}^{n-1} k_{kj}\, y_j \qquad (k = 2, 3, \ldots n-1) \tag{43a}$$

anschreiben.

Die Verformungswege y_j können gemäß Abb. 8b als Linearkombinationen der Schwingungswege q_1, q_n und q_j ,

$$y_j = q_j - (\bar{l}_j/l)\, q_1 - (l_j/l)\, q_n \ , \tag{43b}$$

dargestellt werden. Substituieren wir diese Größen in (43a), so ergibt sich

$$P_k = -\, q_1 \sum_{j=2}^{n-1} k_{kj}\, (\bar{l}_j/l) + \sum_{j=2}^{n-1} k_{kj}\, q_j - q_n \sum_{j=2}^{n-1} k_{kj}\, (l_j/l) \ , \tag{43c}$$

woraus sofort die $(n-2)^2$ dynamischen Steifigkeitszahlen

$$\left.\begin{aligned} c_{kj} \equiv c_{kj} &= k_{kj} \equiv k_{jk} \ , \\ c_{k1} &= -\sum_{j=2}^{n-1} k_{kj}\, (\bar{l}_j/l) \ , \\ c_{kn} &= -\sum_{j=2}^{n-1} k_{kj}\, (l_j/l) \end{aligned}\right\} \qquad \left(\begin{matrix} j \\ k \end{matrix}\right\} = 2, 3, \ldots n-1) \tag{43d}$$

entnommen werden können, mit denen die Gln. 43c die Form

$$P_k = \sum_{j=1}^{n} c_{kj}\, q_j \qquad (k = 2,\ 3,\ \ldots n-1) \tag{43e}$$

erhalten.

Zwei weitere Gleichungen folgen aus den Gleichgewichtssätzen der Statik, die wir mit

$$P_1 = -\sum_{k=2}^{n-1} P_k\, (\bar{l}_k/l) \ , \qquad \sum_{k=1}^{n} P_k = 0 \tag{43f}$$

ansetzen wollen.

Damit erhalten wir mit (43e) und (43d) ein System von n linearen Gleichungen in den q_j, das durch

$$P_k = \sum_{j=1}^{n} c_{kj}\, q_j \qquad (k = 1, 2, \ldots n) \qquad \text{bzw.} \qquad \mathfrak{P} = \mathfrak{C}\, \mathfrak{q} \tag{43g}$$

ausgedrückt werden kann.

Die Matrix $\mathfrak{C}$ ist, wie sich leicht verifizieren läßt, symmetrisch zur Hauptdiagonale; die in (43d) noch nicht angegebenen Einflußzahlen betragen dabei

$$\left.\begin{aligned} c_{11} &= -\sum_{k=2}^{n-1} c_{k1}\, (\bar{l}_k/l) \ , \qquad c_{1j} = -\sum_{k=2}^{n-1} c_{kj}\, (\bar{l}_k/l) \qquad (j = 2, 3, \ldots n-1) \ , \\ c_{1n} &= -\sum_{k=2}^{n-1} c_{kn}\, (\bar{l}_k/l) \ , \qquad c_{nn} = -\sum_{k=1}^{n-1} c_{kn} \ , \end{aligned}\right\} \tag{43h}$$

und es gilt außer der Symmetrieaussage $c_{jk} = c_{\ j}$ noch die Rechenkontrolle, daß die Zeilen- bzw. Spaltensummen von $\mathfrak{C}$ verschwinden; d. h.,

$$\sum_{j=1}^{n} c_{kj} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots n) \qquad \text{bzw.} \qquad \sum_{k=1}^{n} c_{jk} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots n) \ . \tag{43i}$$

Wie man aus der Herleitung ersieht, enthält die Matrix $\mathfrak{C}$ in ihrem Kern die $(n-2, n-2)$ Matrix der statischen Steifigkeitszahlen des zweifach gelagert gedachten Gebildes, während die Randelemente als Linearkombinationen der statischen Steifigkeitszahlen erscheinen.

Diese Ergebnisse lassen sich sinngemäß auch für den Fall anwenden, daß anstelle der Kräfte von außen her einwirkende Belastungsmomente vorhanden sind, wenn dabei berücksichtigt wird, daß die Verformungsgrößen die Verdrehungswinkel der Stabquerschnitte sind.

5. Dynamische Steifigkeitsmatrix einfacher Gebilde. Bei einfach aufgebauten Gebilden, die beispielsweise aus wenigen Einzelmassen und -federn bestehen mögen, bzw. durch solche Gebilde approximiert werden können, läßt sich die auf die Kopplungspunkte bezogene dynamische Steifigkeitsmatrix unmittelbar aus den für das Gebilde geltenden Schwingungsgleichungen herleiten.

Dieser Rechnungsgang kann mit Hilfe eines Eliminationsverfahrens in Form einer für das numerische Rechnen vorteilhaften Matrizenoperation einfach und übersichtlich durchgeführt werden. Es möge hier kurz angedeutet werden.

Die Schwingungsgleichungen eines aus diskreten Massen und Federn aufgebauten Gebildes von f Freiheitsgraden können durch

$$(\mathfrak{C}^{\times} - \lambda\, \mathfrak{A}^{\times})\, \mathfrak{q}^{\times} = \mathfrak{Q}^{\times} \tag{44a}$$

mit $\mathfrak{C}^{\times}$ = Steifigkeitsmatrix[1], $\mathfrak{A}^{\times}$ = Trägheitsmatrix, ausgedrückt werden. Der Klammerausdruck hat dabei im Sinne unserer Betrachtungen die Bedeutung der dynamischen Steifigkeitsmatrix des Schwingungsgebildes, so daß wir

$$\mathfrak{C}^{\times\times} = \mathfrak{C}^{\times} - \lambda\, \mathfrak{A}^{\times} \tag{44b}$$

setzen können.

Greifen am Gebilde n verallgemeinerte Kräfte, wobei $n < f$ sei, an, dann läßt sich durch eine passende Numerierung der Kopplungspunkte erreichen, daß der Spaltenvektor $\mathfrak{Q}^{\times}$ die Form

$$\mathfrak{Q}^{\times} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{Q} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{Q} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{pmatrix}, \tag{44c}$$

annimmt. Das Gleichungssystem (44a) kann in zwei Teilsysteme aufgeteilt werden; in Matrizenschreibweise bedeutet dies ein Unterteilen der Matrizen gemäß

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{Q} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{C}_1^{\times\times} & \mathfrak{C}_2^{\times\times} \\ \mathfrak{C}_3^{\times\times} & \mathfrak{C}_4^{\times\times} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathfrak{q} \\ \mathfrak{q}_{\ddot{u}} \end{pmatrix} \tag{44d}$$

mit [2]

$$\mathfrak{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{q}_{\ddot{u}} = \begin{pmatrix} q_{n+1} \\ q_{n+2} \\ \vdots \\ q_f \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{C}^{\times\times} = \begin{array}{c} \downarrow \\ n \\ f \end{array} \overset{\begin{array}{cc} \rightarrow & n \qquad f \end{array}}{\left[\begin{array}{c|c} \mathfrak{C}_1^{\times\times} & \mathfrak{C}_2^{\times\times} \\ \hline \mathfrak{C}_3^{\times\times} & \mathfrak{C}_4^{\times\times} \end{array}\right]}. \tag{44e}$$

Das Aufspalten liefert nach Ausführung der Matrizenmultiplikation die beiden Matrizengleichungen

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{C}_1^{\times\times}\, \mathfrak{q} + \mathfrak{C}_2^{\times\times}\, \mathfrak{q}_{\ddot{u}}, \qquad 0 = \mathfrak{C}_3^{\times\times}\, \mathfrak{q} + \mathfrak{C}_4^{\times\times}\, \mathfrak{q}_{\ddot{u}}, \tag{44f}$$

aus denen durch Eliminieren von $\mathfrak{q}_{\ddot{u}}$

$$\mathfrak{Q} = [\mathfrak{C}_1^{\times\times} - \mathfrak{C}_2^{\times\times}\, (\mathfrak{C}_4^{\times\times})^{-1}\, \mathfrak{C}_3^{\times\times}]\, \mathfrak{q} \tag{44g}$$

erhalten wird. Der Klammerausdruck stellt dabei, wie wir durch Vergleich mit der Definitionsgleichung (18) ersehen, die gesuchte, auf die n Kopplungspunkte bezogene dynamische Steifigkeitsmatrix des Gebildes dar:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1^{\times\times} - \mathfrak{C}_2^{\times\times}\, (\mathfrak{C}_4^{\times\times})^{-1}\, \mathfrak{C}_3^{\times\times}. \tag{44h}$$

[1] Die Steifigkeitsmatrix $\mathfrak{C}^{\times}$ bedeutet hier die Matrix der statischen Steifigkeitszahlen, wie sie in bekannter Weise aus dem System der Schwingungsgleichungen abgelesen werden kann.

[2] Die an der Matrix $\mathfrak{C}^{\times\times}$ angeschriebenen Indizes n sollen die Spalte bzw. Zeile kennzeichnen, bei der die Unterteilung vorzunehmen ist.

6. Experimentelle Bestimmung der Einflußzahlen. Es kann manchmal die Aufgabe vorliegen, daß die Eigenschwingungszahlen einer Anordnung zu bestimmen sind, von der einzelne Teilgebilde bereits baulich fertiggestellt vorliegen. In solchen Fällen kann es erwünscht sein, die kennzeichnenden dynamischen Parameter der baufertig vorliegenden Glieder (besonders dann, wenn sie sehr komplexe Strukturen aufweisen), experimentell aus einer Schwingungsmessung zu ermitteln. Die durch

$$d_{jk} = \frac{q_j}{P_k}$$

definierten Einflußzahlen ergeben sich beispielsweise für ein approximierendes Gebilde von f Freiheitsgraden gemäß (35) zu

$$d_{jk} = \frac{{}^1y(x_k)\,{}^1y(x_j)}{\mu_1(\lambda_1 - \lambda)} + \frac{{}^2y(x_k)\,{}^2y(x_j)}{\mu_2(\lambda_2 - \lambda)} + \cdots + \frac{{}^fy(x_k)\,{}^fy(x_j)}{\mu_f(\lambda_f - \lambda)}.$$

Bringt man die rechte Seite dieser Gleichung auf einen gemeinsamen Nenner, so erhält man im Zähler eine ganze rationale Funktion $(f-1)$ter Ordnung in λ, die als Produkt ihrer Linearfaktoren dargestellt werden kann

$$d_{jk} = \frac{1}{M_{jk}} \frac{\prod_{s=1}^{s=f-1} (\lambda_{(jk)_s} - \lambda)}{\prod_{r=1}^{r=f} (\lambda_r - \lambda)}.$$

Die Größen $\sqrt{\lambda_{(jk)_s}}$ haben dabei die physikalische Bedeutung von Antiresonanz-Kreisfrequenzen, während die Größen M_{jk} als Ersatzmassen des Gebildes[1] aufgefaßt werden können. Beide Größengruppen stellen bezogene Größen (bezogen auf die Punktepaare x_j, x_k) dar. Ihre Werte können, unter Einschluß der Eigenwerte λ_r, meßtechnisch verhältnismäßig einfach ermittelt werden.

7. Anwendungsbeispiele. Die nachstehend angeführten Beispiele, die verschiedenen technischen Bereichen entnommen sind, sollen die Anwendung des beschriebenen Verfahrens kurz erläutern.

a) Einfach gekoppelte Gebilde. Die Resonanzbedingung für diese einfache Art der Kopplung (siehe Abb. 2) lautet nach (4) $d_{11} + d_{22} = 0$. Beispiele hierfür sind das Zusammenbauen einer Verbrennungskraftmaschine mit einer Luftschraube, oder das Kuppeln zweier zweifach gelagerter Wellen zu einem durchlaufenden dreifach gelagerten Wellenstrang, u. a. m. Diese Fälle sind in ihrer Anwendung allgemein bekannt, so daß es sich wohl erübrigen dürfte, auf weitere Einzelheiten einzugehen.

b) Mehrfache Kopplung. *α*) Doppelrumpf-Flugzeug mit Leitwerk (Abb. 9a). Unter der vereinfachenden Annahme, daß der Doppelrumpf einseitig fest eingespannt sei, erhalten wir das in Abb. 9b bzw, 9c in zwei Projektionen dargestellte, in drei Teilgebilde aufgelöste System mit den an den Trennstellen eingetragenen Bindungskräften bzw. -Momenten. Die beiden Teilgebilde *1* und *2* erscheinen hierbei als einseitig eingespannte, auf Biegung und Verdrehung beanspruchte Kragträger, während das Gebilde *3* (Leitfläche) ein frei-freies Biegungsgebilde darstellt. Bei genügend großer Steifigkeit kann dieser Teil unter Umständen (zumindest für die Eigenschwingung 1. Ordnung) als frei bewegliche starre Platte betrachtet werden. Das Kopplungsschema und die Verknüpfungsmatrix[2] Φ sind in Abb. 9d bzw. 9e zu ersehen.

β) Turbomaschinen-Fundament. Bei der Bestimmung der Eigenschwingungszahlen der in Abb. 10 in stark idealisierter Form dargestellten Turbomaschinenanlage mit Stahlfundament kann man die Zerlegung in verschiedener Weise vornehmen.

Für eine orientierende näherungsweise Berechnung genügt es unter Umständen, die Gesamtanordnung durch das in Abb. 11 gezeigte Ersatzgebilde zu approximieren, bei dem man nur die Elastizität der Fundamentstiele und der Lagerkonstruktion berücksichtigt, und den Fundamenttisch, einschließlich der darauf montierten Maschinengehäuse, als starres plattenförmiges Gebilde betrachtet. Dieses Ersatzgebilde gilt für die beiden Hauptschwingungsformen, Schwingungen in der Hochachse und Schwingungen in der Tischebene (allerdings mit unterschiedlichen Federkonstanten) unverändert.

[1] Siehe etwa *E. Hübner*, Forsch. Ing.-Wesen, 25 (1959) S. 148.
[2] Siehe Fußnote 1, Seite 138.

Größere Genauigkeitsansprüche lassen sich durch eine stärkere Berücksichtigung des strukturellen Aufbaues der Anordnung erfüllen.

Eine mögliche Form der Zerlegung des Gebildes ist in den Abbn. 12a und 12b in Aufriß und Grundriß dargestellt. Wenngleich man mit Rücksicht auf den hiermit verbundenen großen Auf-

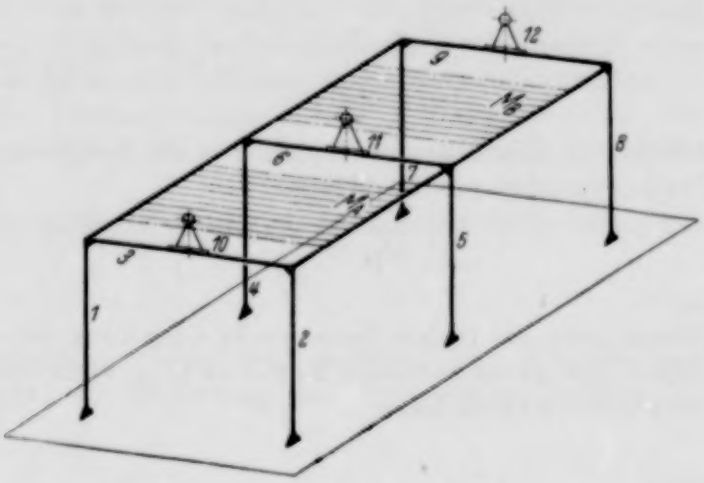
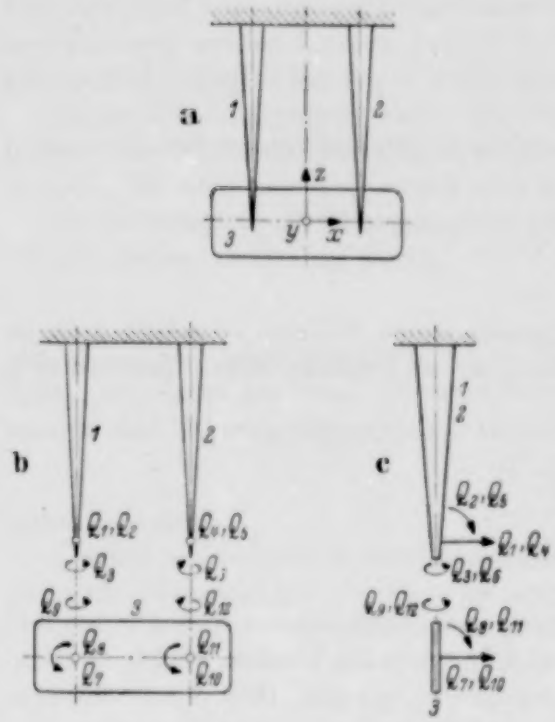
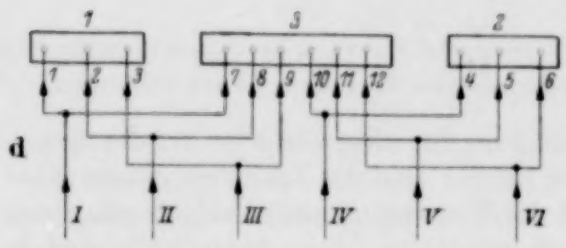


Abb. 10. Idealisiertes Fundament einer Turboanlage.





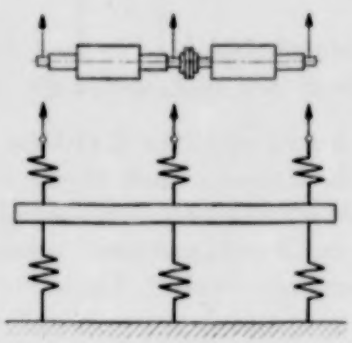


Abb. 11. Turboanlage: Stark vereinfachtes Ersatzsystem.

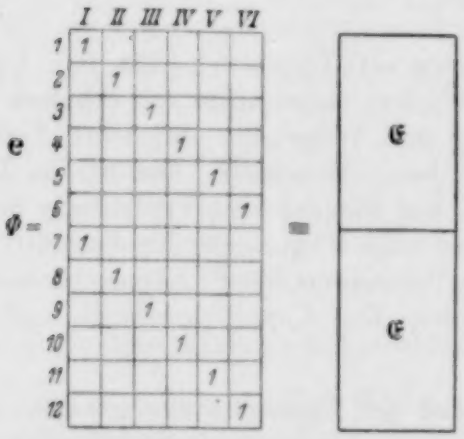


Abb. 9 (links). Doppelrumpf-Flugzeug. — a) Schematisierte Darstellung; b) Aufgespaltenes System mit Belastungsgrößen im Aufriß; c) desgl. im Seitenriß; d) Kopplungsschema; e) zugehörige Verknüpfungsmatrix.

wand an Berechnungsarbeit in praktischen Fällen wohl kaum eine so weitgehende Aufspaltung vornehmen wird, soll dieses Beispiel doch zeigen, wie selbst außerordentlich stark gegliederte Anordnungen rein formal der Berechnung zugänglich gemacht werden können.

Die als starr vorausgesetzten plattenförmigen Massen M_A und M_B stellen dabei die auf den Fundamenttisch montierten Maschinengehäuse, einschließlich entsprechender Teile der Tischkonstruktion, dar. Durch die an diesen Massen angeordneten Federn wird die Biegungselastizität der die Portale verbindenden Längsträger, an denen die Gehäusetragkonstruktion befestigt ist, berücksichtigt[1].

[1] Ebenso kann auch die Elastizität der Rotorlagerung (einschließlich der Nachgiebigkeit des Ölfilms in den Lagern) durch Anordnung zusätzlicher Federn im Ersatzgebilde leicht berücksichtigt werden.

Alle übrigen Teilsysteme, mit Ausnahme der starr gekuppelten Rotoren, sind homogene stabförmige Gebilde, deren Eigenwerte und Eigenformen leicht anzugeben sind.

Die Längsschwingungs-Eigenwerte der Fundamentstiele werden im allgemeinen immer weit über dem Bereich der interessierenden, im wesentlichen durch die Biegungselastizität der Bauteile festgelegten Eigenschwingungszahlen der Gesamtanordnung liegen. Man kann dann die durch die

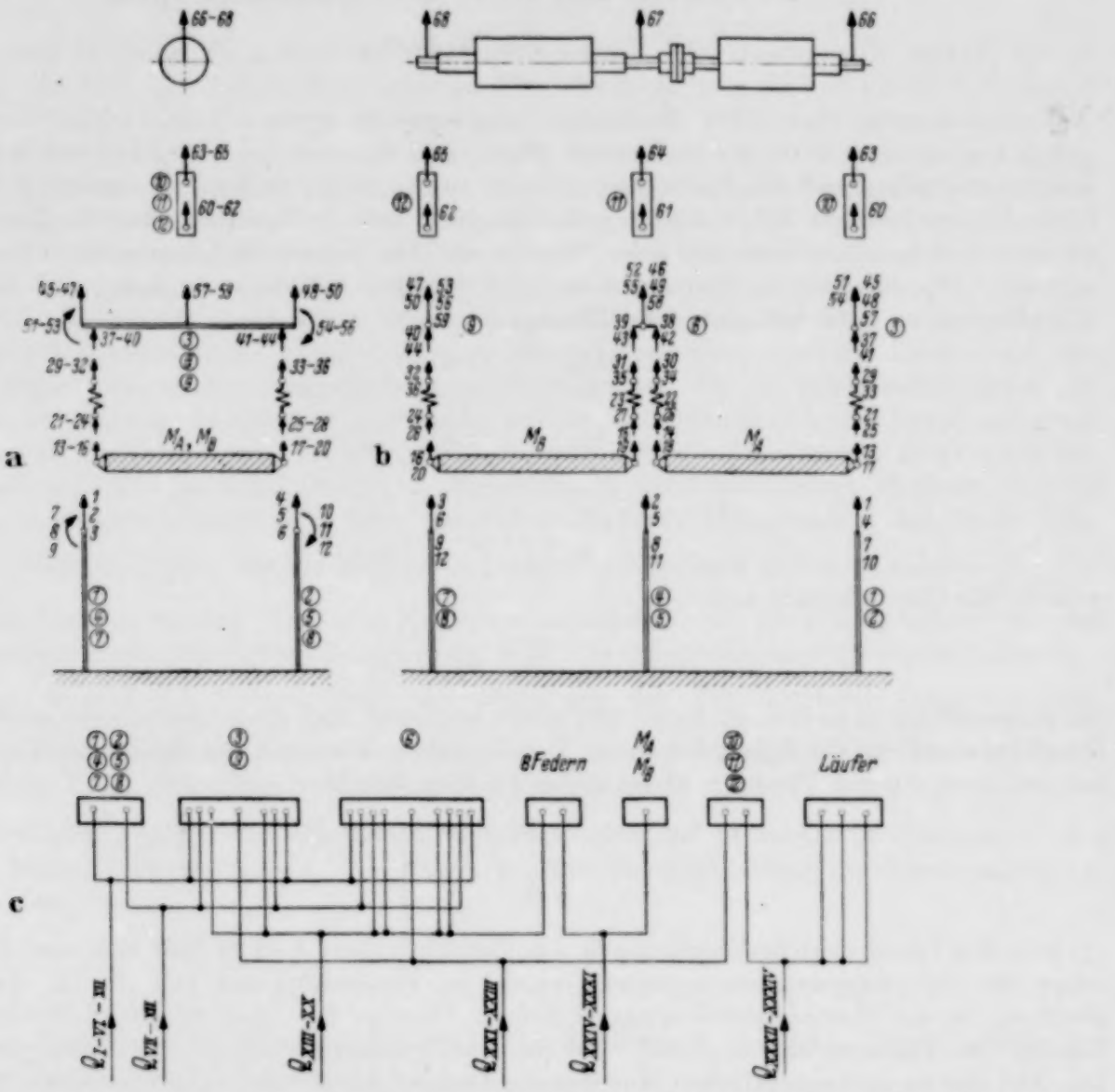


Abb. 12. Turboanlage: Aufgespaltenes System mit Belastungsgrößen für Schwingungen in der Hochachse. — a) Aufriß; b) Seitenriß; c) Kopplungsschema (zur Vereinfachung sind mehrfach vorkommende Bauteile gleicher Art übereinandergezeichnet dargestellt).

Längskräfte beanspruchten einseitig eingespannten Stäbe als masselose Federungsglieder betrachten, für die die Federungsmatrix nach (41c) wegen der festen Einspannung zu einem einzigen Element entartet.

Der Vollständigkeit halber wäre noch zu erwähnen, daß die als starr gekoppelt vorausgesetzte Läufergruppe bei der Berechnung ihrer Eigenwerte und Eigenschwingungsformen als frei-freies Biegeschwingungsgebilde anzunehmen ist.

(Eingegangen am 14. Juli 1959.)

Anschrift des Verfassers: Privatdozent Dr.-Ing. *Erhard Hübner*, Aachen, Im Brockenfeld 17.

Bemerkung zur vollständigen Auswertung des Spannungszustandes in Platten mit Hilfe der Spannungsoptik

Von H. Bufler

1. Grundlagen. Mittels der Spannungs-Dehnungs-Gleichungen (Hookesches Gesetz) bei Berücksichtigung der Geometrie der verformten Platte und der üblichen Vereinfachungen (Kirchhoffsche Annahmen) lassen sich die Spannungen durch die Ableitungen der Durchsenkung W ausdrücken. Statt der Spannungen führt man gewöhnlich die (durch Integration über die Plattendicke h gewonnenen) Schnittmomente und Schnittkräfte ein. Für die auf die Längeneinheit bezogenen Biegemomente M_x, M_y und des Torsionsmoment T ergeben sich dann in Bezug auf die kartesischen Koordinaten x, y die bekannten Beziehungen

$$\frac{M_x}{B} = -\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right), \tag{1}$$

$$\frac{M_y}{B} = -\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right), \tag{2}$$

$$\frac{T}{B} = -(1-\nu)\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}, \tag{3}$$

wobei ν die Querdehnzahl und

$$B = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \tag{4}$$

die Biegesteifigkeit bedeuten. Es sei hier gleich vermerkt, daß diese Gleichungen auch bei veränderlicher Plattendicke Gültigkeit behalten. Der Zusammenhang mit den Spannungen σ_x, σ_y und τ am unteren bzw. oberen Plattenrand ist dabei gegeben durch

$$\left.\begin{matrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau\end{matrix}\right\} = \pm\frac{6}{h^2}\left\{\begin{matrix}M_x\\ M_y\\ T\end{matrix}\right. . \tag{5}$$

Aus den Gleichgewichtsbedingungen am Plattenelement $h\,dx\,dy$ läßt sich eine Beziehung zwischen den Schnittmomenten herleiten, welche in Verbindung mit (1), (2), (3) die Differentialgleichung für die Plattendurchbiegung W liefert. Diese ist der Ausgangspunkt für eine theoretische Lösung von Plattenproblemen und wird für eine spannungsoptische Auswertung nicht benötigt. Das Ziel der spannungsoptischen Auswertung besteht darin, die Schnittmomente M_x, M_y und T zu ermitteln, mit denen wegen (5) der Spannungszustand an der betrachteten Stelle vollständig gegeben ist.

Führt man die Hilfsgrößen H_x und H_y gemäß

$$\frac{H_x}{B} = (1-\nu)\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \tag{6}$$

$$\frac{H_y}{B} = (1-\nu)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \tag{7}$$

ein, so ergeben sich — wie man durch partielles Differentiieren von (6) nach x, (7) nach y und (3) nach y bzw. x leicht verifizieren kann — bei Berücksichtigung von (4) folgende Beziehungen, welche das Torsionsmoment T und die Größen H_x, H_y miteinander in Verbindung setzen:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{H_x}{h^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{T}{h^3}\right) = 0, \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{H_y}{h^3}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{T}{h^3}\right) = 0. \tag{9}$$

(Bei konstanter Plattendicke kann man h wegkürzen.) Diese beiden Gleichungen entsprechen übrigens den Codazzischen Gleichungen in der Flächentheorie.

Die Biegemomente M_x und M_y lassen sich aus H_x und H_y wie folgt berechnen:

$$M_x = -\frac{1}{1-\nu}(H_y + \nu H_x)\,, \tag{10}$$

$$M_y = -\frac{1}{1-\nu}(H_x + \nu H_y)\,. \tag{11}$$

2. Das Auswerteverfahren. Bemerkenswerterweise stimmen die Gleichungen (8) und (9) formal vollkommen mit den Gleichgewichtsbedingungen am Element $dx\,dy$ beim ebenen Problem (Scheibe) überein, wo für H_x/h^3, H_y/h^3 die Normalspannungen und für T/h^3 die Schubspannung stehen. Im ebenen Fall liefert der spannungsoptische Versuch die Linien konstanter Hauptschubspannung (Isochromaten, δ = konst.) und die Linien konstanter Hauptspannungsrichtung (Isoklinen, φ = konst.); aus letzteren läßt sich das Netz der Hauptspannungstrajektorien konstruierem. In entsprechender Weise bedeuten bei Versuchen an Platten[1] (welche — damit sich der optische Effekt nicht aufhebt — entweder mit versilberter Mittelfläche oder aus zwei verschiedenen zusammengeklebten Platten (Zweischichtverfahren) hergestellt werden müssen) die Isochromaten Linien konstanten Haupttorsionsmoments (= Differenz der Hauptbiegemomente geteilt durch zwei) und die Isoklinen Linien konstanter Hauptbiegemomentenrichtung. Es ist daher naheliegend, für die vollständige Auswertung des Spannungszustandes auf die Methoden der ebenen Spannungsoptik zurückzugreifen. *G. Haberland* und *H. Schwieger*[2] verwenden für die Auswertung längs einer Geraden (sie sei die x-Achse) die dem Schubspannungsdifferenzverfahren analoge Methode, bei der neben der Auswertungslinie noch zwei dazu parallel verlaufende Hilfsgeraden, auf denen man im allgemeinen Fall der Platte mit veränderlicher Dicke den Ausdruck T/h^3 (und daraus $\frac{\Delta}{\Delta y}\left(\frac{T}{h^3}\right)$) bestimmen muß, benötigt werden. Das vom Verfasser zunächst für den ebenen Spannungszustand angegebene Verfahren[3], das die direkte Bestimmung des in (8) erforderlichen Differentialquotienten $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{T}{h^3}\right)$ gestattet, besitzt den Vorteil, daß man allein mit den Versuchsdaten längs der Auswertungslinie auskommt. Damit werden die Hilfsgeraden überflüssig und infolgedessen auch die häufig mit großen Ungenauigkeiten verbundenen Differenzenquotienten.

Im folgenden wird gezeigt, wie sich dieses Verfahren auch auf Platten (mit konstanter oder veränderlicher Dicke) übertragen läßt. Wir gehen von der Hauptgleichung der Spannungsoptik, welche bei Platten

$$T_{max} = \frac{S}{2}\,\delta h \tag{12}$$

lautet*, aus. Im Gegensatz zum ebenen Fall steht in (12) die Dicke h im Zähler. Ferner gilt die aus dem Mohrschen Kreis folgende Beziehung

$$T = T_{max} \sin 2\varphi\,. \tag{13}$$

Aus (13) mit (12) erhält man bei Berücksichtigung der Veränderlichkeit von h durch partielle Differentiation

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{T}{h^3}\right) = \frac{S}{2h^2}\left(\frac{\partial \delta}{\partial y}\sin 2\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,2\,\delta\cos 2\varphi - \frac{\partial h}{\partial y}\,\frac{2\,\delta}{h}\sin 2\varphi\right). \tag{14}$$

Wie ich gezeigt habe **, kann man schreiben

$$\frac{\partial \delta}{\partial y} = -\operatorname{tg}\beta_1 \operatorname{ctg}\alpha_1\,,\quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\operatorname{tg}\beta_2 \operatorname{ctg}\alpha_2\,. \tag{15}$$

Dabei bedeutet α_1 bzw. α_2 den Winkel, den die Kurve δ = konst. (Isochromate) bzw. φ = konst. (Isokline) an der Stelle x mit der x-Achse einschließt (Abb. 1a und 1b); die Werte für δ, φ, α_1, α_2

---

[1] *L. Föppl* u. *E. Mönch*, Praktische Spannungsoptik, S. 116, 2. Aufl. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1959.
[2] *G. Haberland* und *H. Schwieger*, Bauplanung u. Bautechnik 9 (1955), S. 350.
[3] *H. Bufler*, Z. f. angew. Phys. 8 (1956) S. 139.
* Siehe *G. Haberland*, a. a. O. Gl. (42); dort wird die Isochromatenordnung $\delta - \delta$ kann auch der Bruchteil einer Ordnung sein — mit m, die spannungsoptische Konstante mit C ($C = 1/S$) bezeichnet.
** Siehe Fußnote 3

können direkt aus den spannungsoptischen Bildern entnommen und als Funktion von x aufgetragen werden (Abb. 2a und 2b). Hierbei sind β_1 bzw. β_2 die Winkel zwischen der x-Achse und der Kurve $\delta = \delta(x)$ bzw. $\varphi = \varphi(x)$ und müssen auf graphischem Weg ermittelt werden. Die Ableitung $\partial h/\partial y$

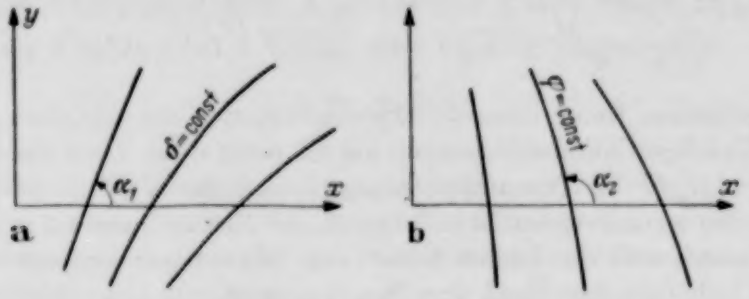


Abb. 1. a Isochromaten; b Isoklinen.

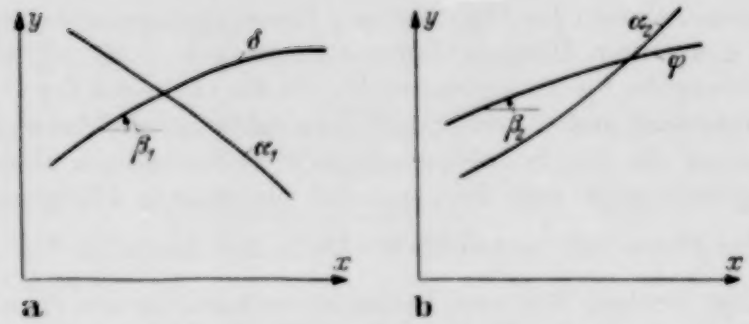


Abb. 2. Die längs der Auswertungslinie benötigten Daten.

läßt sich aus dem Verlauf der Plattendicke bestimmen. Setzt man (15) in (14) ein, so folgt die Formel

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{T}{h^3}\right) = -\frac{S}{2h^2}\left(\operatorname{ctg}\alpha_1 \operatorname{tg}\beta_1 \sin 2\varphi + \operatorname{ctg}\alpha_2 \operatorname{tg}\beta_2\, 2\delta \cos 2\varphi + \frac{\partial h}{\partial y}\frac{2\delta}{h}\sin 2\varphi\right). \tag{16}$$

Durch graphische Integration von (8) gelangt man dann zu

$$H_x = h^3\left[-\int_{x=0}^{x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{T}{h^3}\right)dx + \left(\frac{H_x}{h^3}\right)_0\right], \tag{17}$$

wobei die mit dem Index 0 behaftete Integrationskonstante den Randbedingungen bei $x = 0$ genügen muß*. Zur Berechnung von M_x und M_y ist neben der Kenntnis von H_x gemäß (10) und (11)

$$H_x = -\frac{1}{1+\nu}(M_y - \nu M_x) \tag{18}$$

noch eine weitere Beziehung zwischen M_x und M_y erforderlich; diese liefert der *Mohr*sche Kreis:

$$M_y - M_x = \pm 2\, T_{max} \cos 2\varphi\,. \tag{19}$$

3. Zusammenfassung. Es wird gezeigt, wie man das vom Verfasser für den ebenen Spannungszustand angegebene Auswerteverfahren der Spannungsoptik auch auf Plattenprobleme übertragen kann.

(Eingegangen am 17. Juli 1959.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Hans Bufler*, München, Arcisstr. 21
Institut für Techn. Mechanik der Techn. Hochschule.

* Diese sind bei *G. Haberland* u. *H. Schwieger* für einige Lagerungsfälle einer Rechteckplatte diskutiert.

Ausbeulen

Theorie und Berechnung von Blechen

Von CURT F. KOLLBRUNNER, Dr. sc. techn., Dipl. Bau-Ing. E. T. H., Zürich, und MARTIN MEISTER, Dipl. Bau-Ing. E. T. H., Zürich

Mit 192 Abbildungen und 33 Tabellen. XI, 344 Seiten Gr.-8°. 1958. Ganzleinen DM 42,—

INHALTSÜBERSICHT

Bezeichnungen · Einleitung · Geschichtliche Entwicklung · Theorie des Beulproblems: Einleitung. Die Differentialgleichungen des Problems. Methoden zur Lösung der Beulprobleme · Die verschiedenen Beulfälle: Elastischer Bereich. Plastischer Bereich. Versuche · Ausgesteifte Platten: Problemstellung. Methoden zur Untersuchung ausgesteifter Rechteckplatten. Längsausgesteifte Rechteckplatte unter Druck, Andere Fälle von längsausgesteiften Rechteckplatten. Querausgesteifte Rechteckplatten. Rechteckplatten mit Steifenrost. Weitere Probleme versteifter Rechteckplatten · Platten mit Störungen: Einleitung. Stabilitätsprobleme und Spannungsprobleme. Platten mit anfänglicher Ausbiegung. Exzentrisch belastete Platten. Platten mit Querbelastungen. Einfluß der Größe der Durchbiegungen. Schlußfolgerungen. Eigenspannungen in den Blechen · Überkritischer Bereich: Einleitung. Zur Theorie des überkritischen Bereiches. Versuche. Beulsicherheit · Zusätzliche Literatur · Namenverzeichnis.

AUS DEN BESPRECHUNGEN

„Die sich im Metallbau in zunehmendem Maße durchsetzende ‚vollwandige' Bauweise hat das Beulproblem dünnwandiger Bleche große praktische Bedeutung gewinnen lassen. Die beiden Verfasser wenden sich mit ihrem vom Springer-Verlag in gewohnt sorgfältiger und ansprechender Aufmachung herausgegebenen Buch ‚Ausbeulen' wie mit dem 1955 erschienenen, Knicken' wieder an den praktisch tätigen Bauingenieur. Sie legen einleitend die Theorie des Beulproblems dar und vermitteln die Methoden zu allgemeinen und zu numerischen Lösungen. Sehr gründlich werden dann die verschiedenen Beulfälle besprochen, oft unter Bezugnahme auf Versuchsergebnisse, zu denen ja der erstgenannte Verfasser Bedeutendes beigesteuert hat. Bei den recht umfangreichen Darlegungen über das Ausbeulen im plastischen Bereich werden die leider noch allzu engen Grenzen unserer heutigen Kenntnisse deutlich betont. Das letzte Fünftel des Buches behandelt die Anwendung der Resultate auf ausgesteifte Platten und auf Platten mit Störungen. Den Schluß bilden Hinweise auf die Tragfähigkeit im ausgebeulten, sogenannten überkritischen Bereich, die bei Flugzeugen für nicht allzu große Geschwindigkeiten praktisch ausgenützt wird, im allgemeinen Metallbau aber nur für die Beurteilung des Sicherheitsgrades von Bedeutung ist."

Schweizer Archiv f. angewandte Wissenschaft u. Technik

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Vor kurzem erschien:

Mathematische Gesetze der Logik

Von H. ARNOLD SCHMIDT, Dr. phil., o. Professor der Mathematik und der Math. Logik an der Universität Marburg/Lahn

(**Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften** in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete. Herausgegeben von R. GRAMMEL, F. HIRZEBRUCH, E. HOPF, H. HOPF, W. MAAK, W. MAGNUS, F. K. SCHMIDT, K. STEIN, B. L. VAN DER WAERDEN. Band 69)

I. Vorlesungen über Aussagenlogik

Mit 24 Abbildungen. XXIV, 555 Seiten Gr.-8°. 1960. DM 74,50; Ganzleinen DM 79,—

INHALTSÜBERSICHT

1. Teil. Alternäre Aussagenlogik: Algebra der Logik. Wertende Logik. Grundlegende Begriffe zur deduktiven Logik. Normaldeduktive alternäre Aussagenlogik. Aufschichtende alternäre Aussagenlogik.

2. Teil. Nichtalternäre Aussagenlogik: Die derivative Aussagenlogik und ihre normaldeduktive Kodifikation. Normaldeduktive intuitionistische Aussagenlogik. Aufschichtende derivative und intuitionistische Aussagenlogik. Handliches Entscheidungsverfahren für die natürliche derivative und intuitionistische Aussagenlogik. Strikte Aussagenlogik. Strikte Aussagen- und Modalitätenlogik.

Übersicht über die logischen Zeichen · Verzeichnis der wichtigsten numerierten Formen · Literatur · Sachverzeichnis.

ZUR INFORMATION

Die Vorlesungen wenden sich in erster Linie an die Mathematikstudierenden und -Dozenten, die sich mit der mathematischen Aussagenlogik vertraut machen möchten; sie wollen jedoch gleichzeitig den geisteswissenschaftlich orientierten Logikern und Erkenntnistheoretikern das Studium dieser Disziplin eröffnen. Dieser doppelten Zielsetzung wird dadurch Rechnung getragen, daß für jeden Problemkreis nach Erläuterung der technischen Grundbegriffe und der methodischen Grundgedanken das benutzte Kodifikat ein Stück weit konkret verfolgt und darauf die syntaktischen Probleme und Ergebnisse vorgeführt werden. Ein Abschnitt über die Syntax eines „kodifizierten Wissensgebietes" gibt einen Überblick über den allgemeinen Rahmen, in dem deduktive Logik sich bewegt. — Allenthalben eingestreute elementare Beispiele sowie eine Reihe prägnanter tabellarischer Übersichten und Gegenüberstellungen vermitteln dem Leser ein anschauliches Bild der Materie und erleichtern ihm das Eindringen in den Stoff.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG